Validation expérimentale du modèle du trafic routier

Alexander Semenov

6 juin 2017

Résumé

On va s'intéresser ici à retrouver les résultats expérimentaux exposés dans les articles **Realistic following behaviors for crowd simulation** et https ://arxiv.org/pdf/1111.5708v2.pdf dans l'application des modèles théoriques qu'on peut réaliser dans la simulation.

1 Modalités de l'expérience

L'expérience place des piétons sur une route circulaires et s'intéresse à comment se passe leur mouvement lorsqu'on leur demande de se déplacer comme s'ils marchaient seuls dans la rue avec interdiction de dépasser la personne devant. On veut en particulier savoir à quelle vitesse se déplace un piéton en fonction de sa distance au piéton précédent. L'expérimentateur a pu choisir entre deux cercles : le cercle intérieur et le cercle extérieur. Le petit cercle est de diamètre 15,08 m, le grand cercle est de diamètre 25,76 m. L'expérimentateur a également pu choisir des nombres différents de piétons.

2 Modèles considérés

On place n piétons sur une route circulaire. On repère la position du $i-ème$ piéton par son abscisse curviligne $x_i(t)$. On a $x_i = r\theta_i$ où r est le rayon du cercle et θ_i l'angle relatif déterminant la positon du $i-ème$ piéton. On suppose que les piétons se suivent de la manière suivante avec $n+1 = 1$ et sachant que l'abscisse curviligne est déterminée à $2\pi r$ près : $x_1(t) < x_2(t) < ... < x_n(t) < x_{n+1}(t)$

2.1 Modèle d'ordre 1 en temps « Follow the leader »

On suppose que $\dot{x_i} = \varphi(x_{i+1} - x_i)$ où φ est une fonction concave, différentiable et strictement croissante. Ce modèle néglige le temps de réaction d'un individu. Pour la commodité des calculs, il est raisonnable de prendre une fonction assez régulière de la forme suivante :

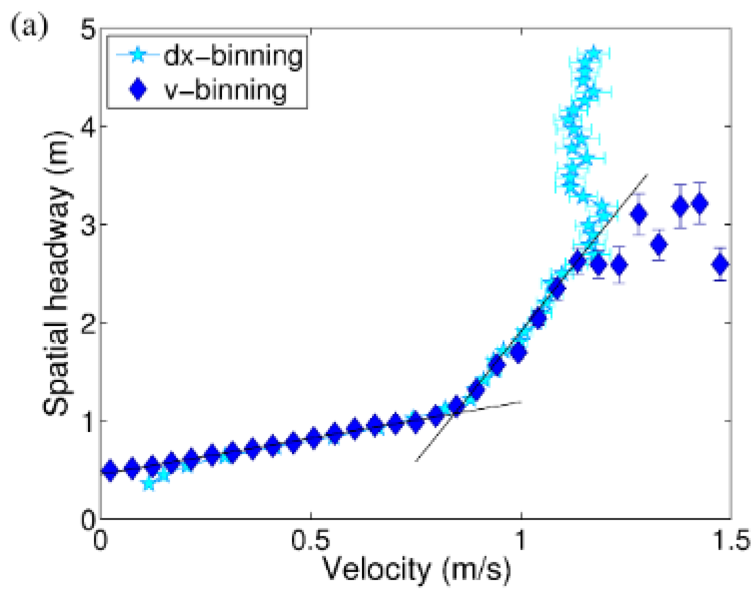
$$\varphi(u) = U(1 - exp(-\frac{u - u_m}{u_s}))$$

où U est la vitesse maximale, u_m est la distance minimale possible avec le successeur et u_s caractérise la sensibilité à la distance « stiffness ».

3 Quelques résultats expérimentaux

3.1 Détermination des paramètres du modèle

L'expérience nous montre que les piétons suivent un modèle d'ordre 1 en temps pour choisir leur vitesse en fonction de la distance à la personne devant. Elle a en particulier montré que φ est une fonction affine par morceaux, dont le graphique est ci-dessus :



Néanmoins, pour la commodité du calcul, on va l'approximer par une fonction du type donné dans la partie 2.1. Les résultats expérimentaux nous permettent de choisir les paramètres adéquats. Ainsi, on choisira :

$$U = 1,15\, m/s$$

$$u_m = 0,45\, m$$

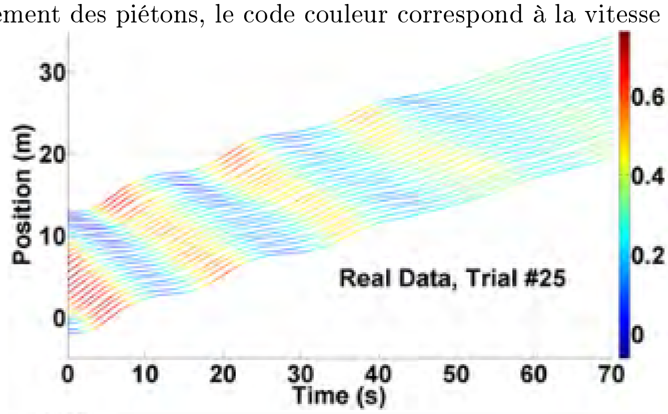
$$u_s = 1,2\, m$$

4 Confrontation de l'expérience et de la simulation : observation de la propagation des perturbations vers l'amont

L'expérimenateur s'est intéressé à la vitesse de propagation des perturbation vers l'amont. On va essayer de retrouver les résultats expérimentaux sur le plan théorique et sur le plan de la simulation. On trace la position de chaque piéton en fonction du temps et on s'intéresse aux endroits où le minimum local de la vitesse est atteint. Les ondes de perturbations sont les propagations de ce minimum local vers l'amont, c'est-à-dire les propagations du bouchon vers l'amont. Ces propagations s'observent sur ces graphiques par des droites de pente négative.

4.1 Données expérimentales

On va s'intéresser pour cette section et les suivantes à l'expérience effectuée avec 24 participants sur le petit cercle. Les données initiales de l'expérience ne sont pas précisées dans le papier, on pense donc que les piétons sont tassés sur une partie du cercle initialement. Voici le graphique correspondant au mouvement des piétons, le code couleur correspond à la vitesse des piétons :



Les minimums locaux de la vitesse correspondent à la couleur bleue foncée. On peut remarquer sur le graphique que la vitesse de propagation des bouchons vers l'amont change en fonction du temps. Comme les points bleu foncés s'approximent par des droites de pente strictement négative, on en déduit que la vitesse de propagation des perturbations vers l'amont est strictement supérieure à la vitesse moyenne des piétons. La pente des droites bleues foncées est la différence entre la vitesse de propagation des perturbations vers l'amont et la vitesse moyenne des piétons, c'est-à-dire la vitesse de propagation des perturbations vers l'amont vue par une observateur extérieur. On regroupe dans le tableau suivant les résultats des mesures effectuées sur le graphique ci-dessus, sachant que la vitesse moyenne des piétons est de $0,304\,m/s$ (Cette donnée expérimentale est fornie par le papier, néanmoins elle entre en contradiction avec la section 3.1 qui est aussi une donnée expérimentale et selon laquelle la vitesse moyenne devrait ici être de $0,240\,m/s$. Dans le tableau ci-dessus, on mettra entre parenthèses le résultat qui tient compte de cette donnée expérimentale) et qu'au bout d'environ $60\,s$ tous les piétons atteignent la vitesse moyenne :

Mesure effectuée au voisinnage du temps	Pente de la droite approchant les minimas locaux de vitesse	Vitesse de propagation des perturbations vers l'amont
$5\,s$	$-0,9\,m/s$	$1,2\,m/s$ $(1,1\,m/s)$
$20\,s$	$-0,6\,m/s$	$0,9\,m/s$ $(0,8\,m/s)$
$40\,s$	$-0,5\,m/s$	$0,8\,m/s$ $(0,7\,m/s)$

4.2 Résultat de la simulation

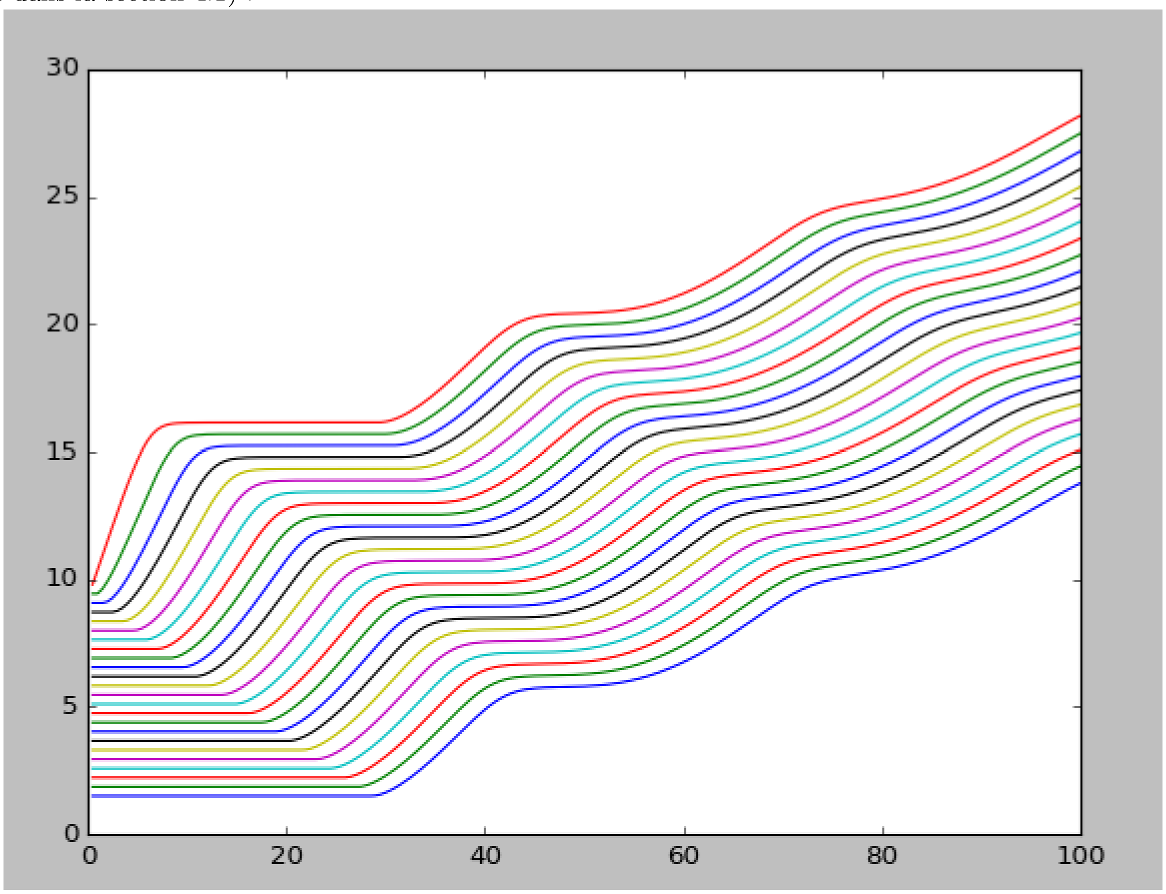
On va prendre pour donnée initiale la configuration où tous les piétons sont uniformément répartis entre $0,1*L$ et $0,65*L$ où L est le diamètre du cercle. La région du cercle entre $0,65*L$ et $1,1*L$ est donc initialement vide. On va essayer de faire un tracé similaire à l'expérience. Les points correspondant aux bouchons sont les points où la pente est nulle.

On va utiliser l'algorithme suivant pour effectuer le tracé (en Python) :

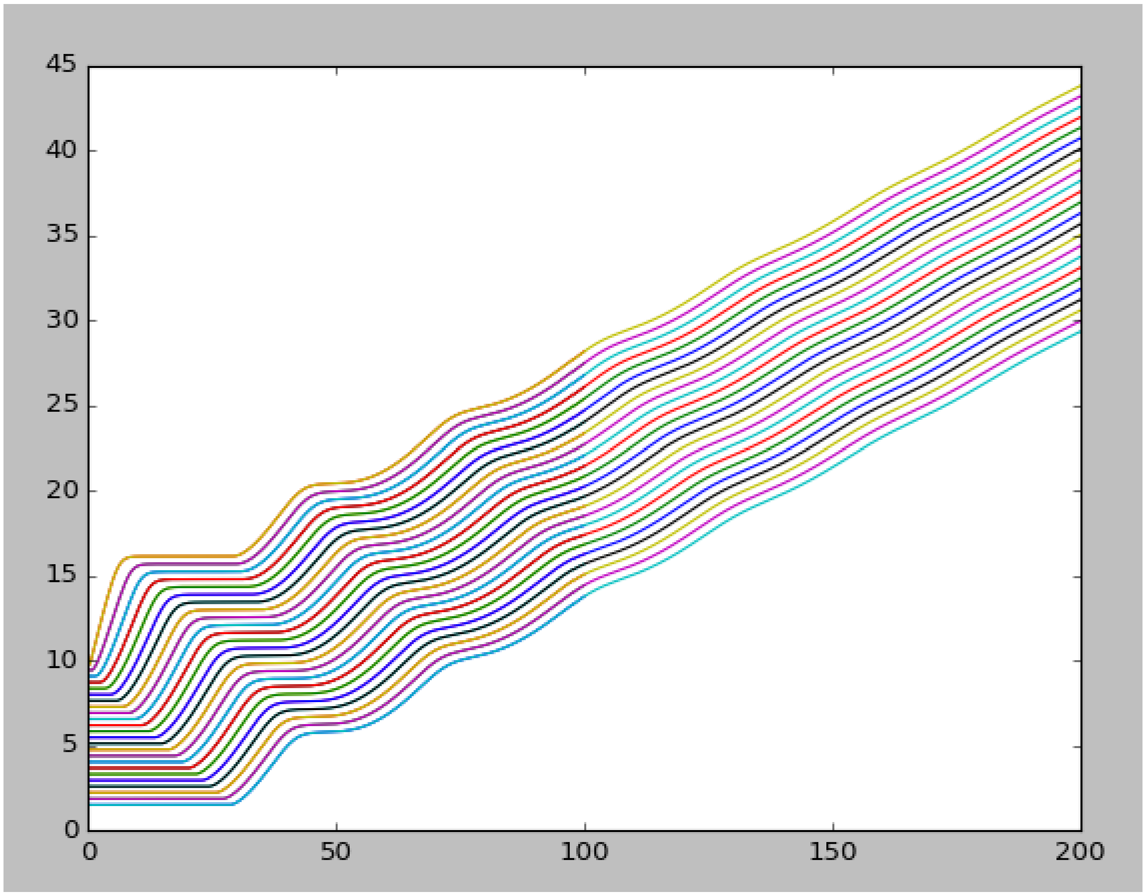
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
L = 15.08
N = 24
dt = 0.5 ; idt = 1/dt
Nt = 200
U = 1.15
umin=0.45
us = 1.2
def vOd(u):
    dist = u+L*(u<0)
    return U*(1-np.exp(-(dist-umin)/us))*(dist>umin)
tt = np.linspace(0.5,Nt*dt,Nt)
pp = [0]*N
for i in range(N):
    pp[i] = np.zeros(np.shape(tt))
xx = np.linspace(0.1*L,0.65*L,N)
for i in range(N):
    pp[i][0] = xx[i]
for it in range(1,Nt):
    Lxx = np.roll(xx,-1)
    uu = Lxx-xx
    uu+= L*(uu<0)
    vv = vOd(uu)
```

```
    xx += dt*vv
    for i in range(N):
        pp[i][it] = xx[i]
for i in range(N):
    plt.plot(tt,pp[i])
plt.show()
```

Et le résultat qu'on obtient est le suivant (les unités des axes sont les mêmes que dans la section 4.1) :



En changeant Nt=200 en Nt=400, on obtient :



Le graphique obtenu a la même allure que dans la partie expérimentale. Pour comparer notre modèle (les résultats de la simulation) à l'expérience, nous allons faire des mesures sur ce graphique. On espère obtenir des résultats similaires. On remarque que la vitesse moyenne des piétons est d'environ $0,16\,m/s$ et que tous les piétons se déplacent à la vitesse limite au bout d'environ $100\,s$. Ceci est sensiblement différent par rapport à l'expérience. Ceci est probablement dû à une différence trop importante de la fonction φ qu'on a choisi pour le modèle (par commodité de calcul) et la fonction φ déterminée par l'expérience. On rappelle que la fonction donnée par l'expérience donne une vitesse moyenne de $0,24\,m/s$. Et on calcule que la fonction φ donnée par notre modèle donne une vitesse moyenne $0,16\,m/s$, ce qui perturbe nécessairement la validité des résultats donnés par la simulation.

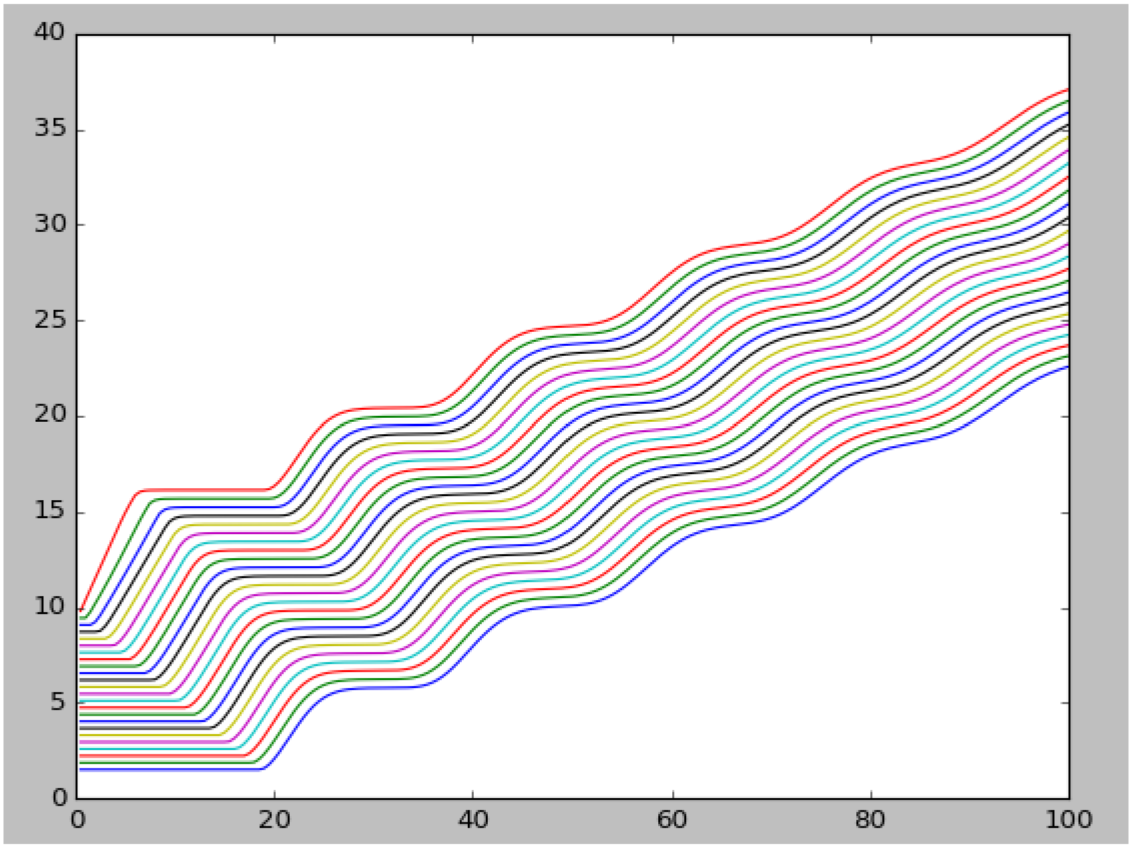
4.3 Modification du modèle et résultat de la simulation de ce nouveau modèle

On va modifier la définition de la fonction φ et la remplacer par la fonction donnée par l'expérience, appelée vOd dans l'algorithme. On a utilisé les données qui étaient précisées dans les papiers décrivant l'expérience :

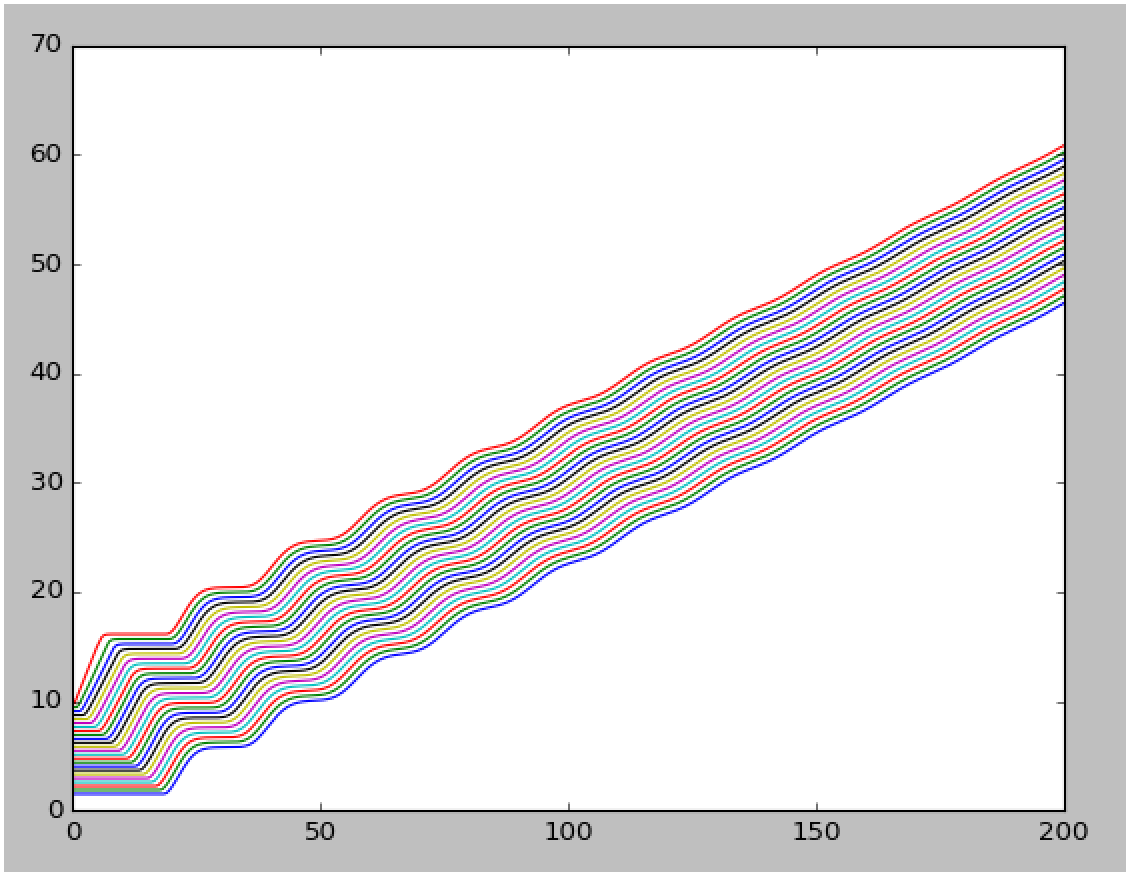
```
def phi(x):
    if x>3:
        return 1.15
    elif x>1.1:
        return 0.19*x + 0.65
    elif x>0.45:
        return 1.35*(x-0.45)
    else:
        return 0.
def v0d(u):
    dist = u+L*(u<0)
    k = np.zeros(N)
    for i in range(N):
        k[i] = phi(u[i])
    return k
```

Cette définition est moins commode pour faire des calculs théoriques mais est plus proche de la réalité. On espère obtenir des résultats plus proches des résultats expérimentaux. Voici ce qu'on obtient :

Pour Nt=200 :



Pour Nt=400 :



Désormais, la vitesse moyenne est celle de l'expérience. On veut encore comparer les vitesses de propagation des perturbations entre le modèle et l'expérience. Pour cela, on va construire un tableau similaire à celui da la partie 4.1. La perturbation à la perturbation de laquelle on s'intéressera est l'apparition d'un bouchon. On fera les mesures sur les deux graphiques ci-dessus. Voici le tableau (il n'y a pas lieu de mettre des valeurs entre des parenthèses ici, car il n'y a pas de conflit sur la valeur de la vitesse moyenne) :

Mesure effectuée au voisinnage du temps	Pente de la droite approchant les minimas locaux de vitesse	Vitesse de propagation des perturbations vers l'amont
$20\,s$	$-0,527\,m/s$	$0,767\,m/s$
$40\,s$	$-0,579\,m/s$	$0,819\,m/s$
$60\,s$	$-0,606\,m/s$	$0,846\,m/s$

On remarque que lorsque le temps est grand, la vitesse de propagation des perturbations obtenue par la simulation de notre modèle corrigé est similaire à la vitesse de propagation des perturbations observée dans l'expérience. Néanmoins, cette vitesse ne varie pas autant que dans l'expérience. Ceci peut être dû au fait que les conditions initiales prises dans la simulation et l'expérience ne sont pas les mêmes.

4.4 Confrontation au résultat théorique

On note u la distance moyenne entre deux piétons voisins. En notant, φ' la dérivée de la fonction φ, on peut établir comme conséquence du modèle qu'on a choisi et en faisant des approximations linéaires, que pour des petites perturbations, la perturbation se déplace vers l'amont à la vitesse $u\varphi'(u)$. Calculons cette valeur dans notre cas particulier en choisissant pour φ le choix de la partie 4.3 et $u = 0,628\,m$.

$$u\varphi'(u) = 0,85\,m/s$$

Ceci correspond bien à la valeur qu'on trouve pour les temps grands (i.e. environ $60\,s$, quand les perturbations sont faibles) aussi bien par la simulation que par l'expérience.

5 Conclusion

Grâce à la simulation, on a confronté notre modèle théorique du mouvement des piétons sur une route circulaire à l'expérience. La simulation a permis de calculer les résultats du modèle théorique et de les comparer aux résultats de l'expérience. Pour la comparaison avec l'expérience, on a pris les mêmes données du problème que celles qui étaient prises dans l'expérience. Les résultats qu'on a observé et qui nous ont permis de juger si le modèle colle à l'expérience sont la vitesse moyenne du mouvement des piétons ainsi que la vitesse de propagation des perturbations vers l'amont (du type bouchon). Voici ce qu'on peut conclure :

1. La loi de la vitesse d'un piéton en fonction de la distance à la personne devant qu'on a initialement choisi pour notre modèle donne des résultats trop éloignés de l'expérience. Il convient de choisir la loi donnée par l'expérience constituée de trois morceaux affines.
2. Dans le cas de l'expérience, la vitesse de propagation des perturbations vers l'amont admet une loi plus complexe lorsqu'il s'agit de grandes perturbations que la loi qu'on peut déduire de notre modèle théorique qui ne dépend pas de l'amplitude des perturbations. Cette loi est bien confirmée pour des faibles perturbations.
3. Pour des faibles perturbations et en faisant un choix de la loi de la vitesse d'un piéton en fonction de la distance au prédécesseur conforme à l'expérience, on trouve que notre modèle théorique (dans les résultats auxquels on s'est intéressé) est validé par l'expérience.