

# Soutenance de thèse : Dynamique des breathers

Alexander Semenov<sup>1</sup>  
sous la direction de Raphaël Côte

<sup>1</sup>IRMA  
Université de Strasbourg

Soutenance de thèse  
15 juillet 2022

# Sommaire

- 1 **Présentation du modèle**
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 **Résultats connus**
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 **Nouveaux résultats**
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Sommaire

- 1 **Présentation du modèle**
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 **Résultats connus**
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 **Nouveaux résultats**
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$u_t + (u_{xx} + u^3)_x = 0, \quad (\text{mKdV})$$
$$(t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

- La généralisation la plus simple de (KdV) :

$$u_t + (u_{xx} + u^2)_x = 0. \quad (\text{KdV})$$

- Apparaît aussi comme modèle pour décrire l'onde d'Alfvén dans un plasma froid sans collisions (Kakutani-Ono 1969).
- Est aussi un modèle pour d'autres phénomènes physiques (électrodynamique, mécanique des fluides...).

# Sommaire

- 1 **Présentation du modèle**
  - Introduction du modèle
  - **Particularités du modèle**
  - Objets considérés
- 2 **Résultats connus**
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 **Nouveaux résultats**
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Une équation dispersive

- (KdV), (mKdV) et leurs généralisations sont des équations dispersives. C'est aussi le cas de (NLS) ou de (KP).
- C'est une propriété de la partie linéaire de l'équation :

$$u_t + u_{xxx} = 0. \quad (\text{Airy})$$

- Pour  $u(t, x) = \exp(i(kx + \omega t))$  solution de (Airy), on a la relation :

$$k = \omega^{1/3},$$

où  $k$  est le nombre d'onde et  $\omega$  est la pulsation.

- Une solution de (Airy) de nombre d'onde  $k$  se propage donc à une vitesse  $-k^2 < 0$  : *elle est négative*.

# Une équation non linéaire et focalisante

- La nonlinéarité vient avec un signe « + » : elle est à l'origine d'un phénomène de concentration.
- Il peut être à l'origine d'une explosion en temps fini (bien que cela n'arrive pas pour (mKdV) dans les espaces de Sobolev pour lesquels il y a existence locale).
- Il y a *concurrence* entre l'effet de la partie linéaire qui est la *dispersion* et l'effet de la nonlinéarité qui est la *concentration*.
- Équilibre réalisé par les *solitons*.



# Une équation intégrable

- Propriété rare dans la famille des généralisations de (KdV) : seules (KdV), (mKdV) et l'équation de Gardner la vérifient.
- Existence d'une paire de Lax pour (mKdV) (Wadati 1973) : couple d'opérateurs différentiels  $L$  et  $M$  tels que (mKdV) est équivalente à

$$L_t = [L, M].$$

- *Conséquences* : infinité de lois de conservation pour (mKdV) et méthode de *scattering inverse* permettant de calculer explicitement des solutions.

# Problème de Cauchy pour (mKdV)

Espaces bien adaptés : espaces de Sobolev  $H^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$  :

$$\|v\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

- Problème de Cauchy *globalement bien posé* pour une donnée initiale dans  $H^s$  pour  $s > \frac{1}{4}$ , avec une continuité uniforme en la donnée initiale (Colliander-Keel-Staffilani-Tao 2003, Kenig-Ponce-Vega 1993).
- Pour  $s \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ , il y a encore une forme d'*existence globale* pour le problème de Cauchy pour une donnée initiale dans  $H^s$ , mais *il n'y a plus de continuité uniforme en la donnée initiale* (Harrop Griffiths-Killip-Visan 2020, Kenig-Ponce-Vega 2001).

# Intégrales conservées de (mKdV)

Pour une solution  $u$  de (mKdV), les intégrales suivantes sont conservées au cours du temps :

- La masse

$$M[u] := \frac{1}{2} \int u^2 dx,$$

- L'énergie

$$E[u] := \frac{1}{2} \int u_x^2 dx - \frac{1}{4} \int u^4 dx,$$

- L'énergie seconde

$$F[u] := \frac{1}{2} \int u_{xx}^2 dx - \frac{5}{2} \int u^2 u_x^2 dx + \frac{1}{4} \int u^6 dx.$$

## Symétries de (mKdV)

Pour une solution  $u(t, x)$  de (mKdV),

- *Translation* en temps et en espace : pour  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $u(t + t_0, x + x_0)$  est aussi solution.
- *Symétrie centrale* :  $u(-t, -x)$  est aussi solution.
- *Réflexion par rapport à l'axe des abscisses* :  $-u(t, x)$  est aussi solution.
- *Changement d'échelle* : pour  $\lambda > 0$ ,  $\frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}\right)$  est aussi solution.

Le changement d'échelle laisse invariante la norme  $L^1$  de (mKdV) : cette équation est  $L^1$ -critique.

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Solitons

- C'est une solution de (mKdV) qui est une bosse qui se propage à une vitesse constante  $c$  sans déformation, qui a un signe  $\kappa \in \{-1, 1\}$  et étant positionnée à  $x_0$  en  $t = 0$  :

$$R_{c,\kappa}(t, x; x_0) := \kappa Q_c(x - ct - x_0).$$

- $Q_c$  doit être solution de l'équation elliptique :

$$Q_c'' - cQ_c + Q_c^3 = 0.$$

- Si  $c > 0$ , elle a une solution unique dans  $H^1$ , aux translations et changements de signe près. On prend celle qui est positive et paire :

$$Q_c(x) := \frac{\sqrt{2c}}{\cosh(\sqrt{c}x)}.$$

# Les breathers

- Pour  $\alpha, \beta > 0$  (paramètres de formes),  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  (paramètres de translation), un breather se définit comme :

$$B_{\alpha, \beta}(t, x; x_1, x_2) := 2\sqrt{2}\partial_x \left[ \arctan \left( \frac{\beta \sin(\alpha y_1)}{\alpha \cosh(\beta y_2)} \right) \right],$$

- où  $y_1 := x + \delta t + x_1$  (la phase),  $y_2 := x + \gamma t + x_2$  (la position),  $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$  (l'opposé de la pulsation) et  $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$  (l'opposé de la vitesse).
- Un breather peut être borné par une enveloppe exponentielle.
- Contrairement aux solitons, un breather peut aller à gauche : c'est une des raisons pour lesquels il sera plus compliqué à traiter qu'un soliton.

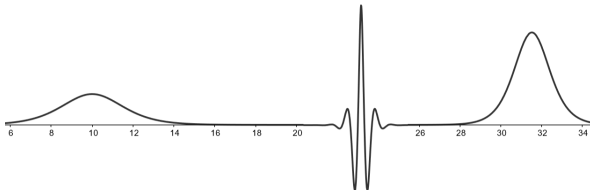
# Multi-breathers

## Définition

Soient  $P_1, \dots, P_J$  des solitons ou des breathers de (mKdV) et  $P$  leur somme.

Un *multi-breather* associé à  $P$  est une solution  $p \in \mathcal{C}([T^*, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$  de (mKdV) telle que

$$\left\| p(t) - \sum_{j=1}^J P_j(t) \right\|_{H^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$





# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

## Stabilité orbitale des solitons

## Théorème (Weinstein, Bona, Souganidis, Strauss)

Soit une solution  $u$  de (mKdV) dans  $C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ . Soit  $R_{c,\kappa}(t, x; x_0)$  un soliton. Il existe  $K > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  (indépendants de  $u$ ) tels que pour tout  $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ , si

$$\|u(0) - R_{c,\kappa}(0, \cdot; x_0)\|_{H^1} < \varepsilon,$$

alors il existe  $t \mapsto x_0(t)$  (une translation pour tout temps) telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - R_{c,\kappa}(t, \cdot; x_0(t))\|_{H^1} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |x_0'(t)| < K\varepsilon.$$

# Stabilité orbitale des breathers

## Théorème (Alejo, Muñoz)

Soit  $u$  une solution de (mKdV) dans  $C(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}))$ . Soit  $B_{\alpha,\beta}(t, x; x_1, x_2)$  un breather. Il existe  $K > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  (indépendants de  $u$ ) tel que pour tout  $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ , si

$$\|u(0) - B_{\alpha,\beta}(0, \cdot; x_1, x_2)\|_{H^2} < \varepsilon,$$

alors il existe  $t \mapsto x_1(t)$  et  $t \mapsto x_2(t)$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u(t) - B_{\alpha,\beta}(t, \cdot; x_1(t), x_2(t))\|_{H^2} < K\varepsilon.$$

De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |x_1'(t)| + |x_2'(t)| < K\varepsilon.$$

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

## Propriétés remarquables

- Propriétés de stabilité remarquables des solitons et des breathers.
- Existence, unicité dans  $H^1$  et régularité d'un multi-soliton de (gKdV)  $L^2$ -sous-critique (Martel 2005).
- Stabilité orbitale  $H^1$  d'une somme de solitons de (gKdV)  $L^2$ -sous-critique (Martel-Merle-Tsai 2002).
- Résolution en solitons et en breathers de (mKdV) (Chen-Liu 2021).
- Formule pour un multi-breather de (mKdV) (Wadati-Okhuma 1982) obtenue grâce au scattering inverse. (-> élasticité des collisions entre les solitons)

# Nouvelles questions

- Existence, unicité et régularité d'un multi-breather ?
- Stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers ?  
d'un multi-breather ?
- Élasticité d'une collision entre deux breathers à déduire du scattering inverse ?

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives



# La somme

- On se donne  $K$  breathers (notés  $B_1, \dots, B_K$  de paramètres  $\alpha_k, \beta_k$ ) et  $L$  solitons (notés  $R_1, \dots, R_L$  de paramètres  $c_l$  et signes  $\kappa_l$ ) de (mKdV). On les suppose *de vitesses deux à deux distinctes*. Ceci nous autorise à les ranger par ordre croissant de vitesses :  $P_1, \dots, P_J$  (avec  $J = K + L$ ). On note  $v_j$  la vitesse de  $P_j$ ,  $x_j(t)$  la position de  $P_j$  et

$$P = \sum_{j=1}^J P_j.$$

- Constantes associées à  $P$  :

$$\beta := \min(\{\beta_k, 1 \leq k \leq K\} \cup \{\sqrt{c_l}, 1 \leq l \leq L\}),$$

$$\tau := \min_{1 \leq j \leq J-1} (v_{j+1} - v_j).$$

# Existence et régularité d'un multi-breather

## Théorème (S.)

*Il existe  $\theta > 0$ ,  $T^* > 0$  et  $A_s > 0$  pour tout  $s \geq 0$ , tels qu'il existe un multi-breather  $p$  associé à  $P_1, \dots, P_J$  qui vérifie  $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$  pour tout  $s \geq 0$  et*

$$\forall t \geq T^*, \quad \|p(t) - P(t)\|_{H^s} \leq A_s e^{-\theta t}.$$

On peut prendre

$$\theta := \frac{\beta\tau}{32}.$$

Si on suppose que les solitons et les breathers sont suffisamment découplés et rangés dans l'ordre des vitesses croissant à  $t = 0$ , alors le théorème ci-dessus est vrai avec  $T^* = 0$ .

# Unicité d'un multi-breather

## Théorème (S.)

*Si  $v_2 > 0$ , alors il existe un unique multi-breather associé à  $P_1, \dots, P_J$ .*

## Théorème (S.)

*Il existe  $N > 0$  suffisamment grand tel qu'il existe une unique solution  $p \in \mathcal{C}([T_0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$  de (mKdV) telle que*

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} = O\left(\frac{1}{t^N}\right), \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

# Unicité d'un multi-breather

## Théorème (S.)

*Si  $v_2 > 0$ , alors il existe un unique multi-breather associé à  $P_1, \dots, P_J$ .*

## Théorème (S.)

*Il existe  $N > 0$  suffisamment grand tel qu'il existe une unique solution  $p \in \mathcal{C}([T_0, +\infty[, H^2(\mathbb{R}))$  de (mKdV) telle que*

$$\|p(t) - P(t)\|_{H^2} = O\left(\frac{1}{t^N}\right), \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

# Stabilité orbitale

## Théorème (S.)

Si  $v_2 > 0$ , il existe  $A_0, \theta_0, D_0, a_0 > 0$  tels qu'on a ce qui suit. Soit  $u$  une solution  $H^2$  de  $(mKdV)$ ,  $D \geq D_0$  et  $a \in [0, a_0]$  tels que

$$\|u(0) - P(0)\|_{H^2} \leq a, \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, J, \quad x_j(0) > x_{j-1}(0) + D.$$

Alors,

$$\forall t \geq 0, \quad \|u(t) - \tilde{P}(t)\|_{H^2} \leq A_0(a + e^{-\theta_0 D}),$$

où  $\tilde{P}$  correspond à  $P$  modifié avec des paramètres de translation  $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$  définis pour tout  $t \geq 0$ .

De plus,

$$\forall t \geq 0, \quad \sum_{l=1}^L |x'_{0,l}(t)| + \sum_{k=1}^K (|x'_{1,k}(t)| + |x'_{2,k}(t)|) \leq CA_0 (a + e^{-\theta_0 D}).$$

# Stabilité orbitale

- Ici, l'orbite de  $P$  est

$$\left\{ \sum_{k=1}^K B_{\alpha_k, \beta_k}(\cdot; x_{1,k}, x_{2,k}) + \sum_{l=1}^L R_{\kappa_l, \kappa_l}(\cdot; x_{0,l}), (x_{1,k}, x_{2,k}, x_{0,l}) \in \mathbb{R}^{2K+L} \right\}$$

est paramétrée par  $2K + L$  paramètres. De plus, dans le théorème, on se restreint aux somme constituées d'objets suffisamment découplés.

- On déduit du théorème ci-dessus, la stabilité orbitale d'un multi-breather de (mKdV) lorsque  $v_2 > 0$ .

## Conséquences de la formule : élasticité des collisions

- La formule d'un 2-soliton de (mKdV) est donnée par :

$$\rho(t, x) := -2\sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x} \arctan \left[ \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \frac{\cosh(y_1)}{\sinh(y_2)} \right],$$

$$\text{où } y_1 := \frac{\sqrt{c_1}c_1 - \sqrt{c_2}c_2}{2} t - \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}}{2} x + x_1 \text{ et}$$

$$y_2 := -\frac{\sqrt{c_1}c_1 + c_2\sqrt{c_2}}{2} t + \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{2} t + x_2.$$

- Lorsque 2 objets se rencontrent, l'objet le plus rapide subit un décalage vers la droite et l'objet le plus lent - vers la gauche.
- Dans le cas où c'est deux solitons, la formule donnant le décalage de  $R_1$  est

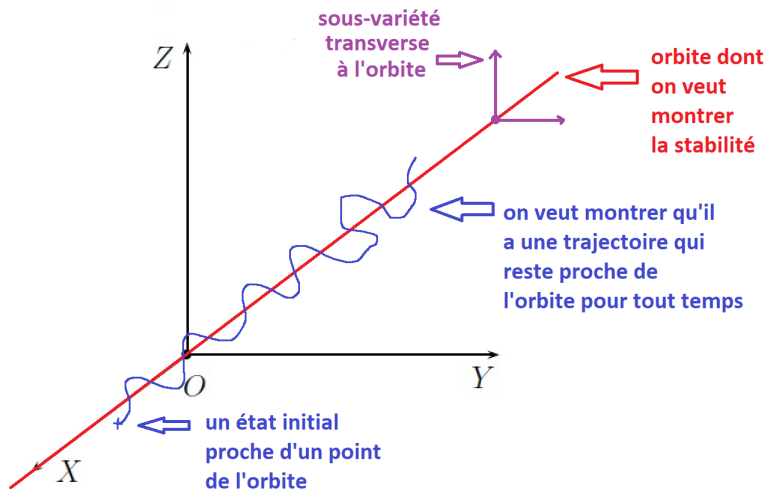
$$\frac{2}{\sqrt{c_1}} \ln \left( \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}}{|\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}|} \right).$$

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives



# Stabilité orbitale



# Pour la somme de solitons et de breathers

- On choisit les translations  $x_{0,l}(t), x_{1,k}(t), x_{2,k}(t)$  de sorte à ce que  $w(t) = u(t) - \tilde{P}(t)$  soit orthogonal à l'orbite. Autrement dit,

$$\int w(t) \partial_x \tilde{R}_k = \int w(t) \partial_{x_1} \tilde{B}_k = \int w(t) \partial_{x_2} \tilde{B}_k = 0.$$

- Profil de filtration :

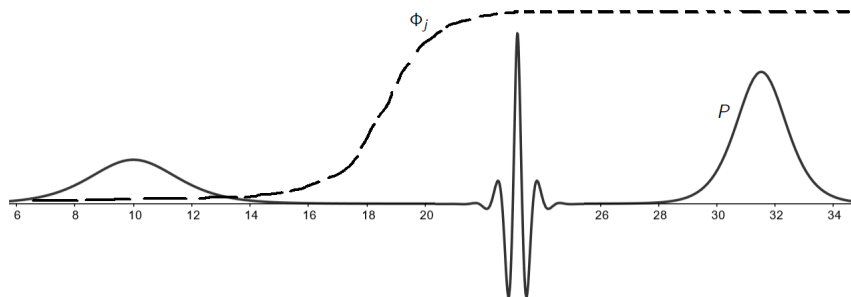
$$\Psi(x) := \frac{2}{\pi} \arctan(\exp(\sqrt{\sigma}x/2)),$$

où  $\sigma > 0$  est à choisir judicieusement.

- Pour  $j \geq 2$ , on choisit  $\tilde{x}_{j-1}(t) < m_j(t) < \tilde{x}_j(t)$  de sorte à ce que  $m'_j > 0$ , et

$$\Phi_j(t, x) = \Psi(x - m_j(t)), \quad \Phi_1 = 1.$$

## Pour la somme de solitons et de breathers



- Lois de conservation localisées  $M_j$ ,  $E_j$  et  $F_j$  :

$$M_j[u](t) := \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j dx.$$

# Masse et Énergie au voisinage d'un objet

- Masse au voisinage de  $\tilde{P}_j$  :

$$\begin{aligned}M[\tilde{P}_j + w] &= M[\tilde{P}_j] + \int w \tilde{P}_j + O(\|w\|_{L^2}^2) \\ &=: M[\tilde{P}_j] + m_j[w] + O(\|w\|_{L^2}^2).\end{aligned}$$

- Énergie au voisinage de  $\tilde{P}_j$  :

$$\begin{aligned}E[\tilde{P}_j + w] &= E[\tilde{P}_j] + \int w_x \tilde{P}_{j_x} - \int w \tilde{P}_j^3 + O(\|w\|_{H^1}^2) \\ &=: E[\tilde{P}_j] + e_j[w] + O(\|w\|_{H^1}^2).\end{aligned}$$

# Pour la somme de solitons et de breathers

- Récurrence finie : en raisonnant de droite à gauche, on montre que

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_j + |m_j[w(t)] - m_j[w(0)]| + |e_j[w(t)] - e_j[w(0)]| \leq \left[ A_0 \left( a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2,$$

en sachant que, pour tout  $i > j$ ,

$$\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_i + |m_i[w(t)] - m_i[w(0)]| + |e_i[w(t)] - e_i[w(0)]| \leq \left[ A_0 \left( a + e^{-\theta_0 D} \right) \right]^2.$$

- L'hypothèse de récurrence nous permettra de borner les termes associés aux  $P_i$  pour  $i > j$ .

# Monotonie

- Grâce à la *monotonie* de  $\Phi_j$ , on prouve que  $M_j$ ,  $E_j$  et  $F_j$  sont presque-décroissantes (décroissantes à des termes bornables par  $e^{-\theta_0 D}$  près, d'où la présence de ce terme dans le résultat final).
- Pour  $j = 1$  (dernière étape de la récurrence),  $M_1$ ,  $E_1$  et  $F_1$  ne sont pas localisées, elles sont donc constantes.
- On définit une *fonctionnelle de Lyapunov* (presque-décroissante) localisée autour de  $P_j$  de la manière suivante :

$$\mathcal{H}_j(t) := F_j(t) + 2(b_j^2 - a_j^2) E_j(t) + (a_j^2 + b_j^2)^2 M_j(t),$$

où  $(a_j, b_j) = (\alpha_k, \beta_k)$  si  $P_j = B_k$  et  $(a_j, b_j) = (0, \sqrt{c_l})$  si  $P_j = R_l$ .

- Pour  $j \geq 2$ , comme  $v_2 > 0$ , on trouve que  $\mathcal{H}_j$  est presque-décroissante.
- Pour  $j = 1$  (dernière étape de la récurrence),  $\mathcal{H}_1$  est constante.

# Coercivité

- Développement limité de  $\mathcal{H}_j$  en  $w$  en écrivant  $u = \tilde{P} + w$  :

$$\mathcal{H}_j(t) - \mathcal{H}_j(0) = \mathcal{Q}_j(t) - \mathcal{Q}_j(0) + \dots,$$

le terme linéaire étant négligé grâce à l'équation elliptique vérifiée par  $P_j$  et l'hypothèse de récurrence.

- **Cas  $P_j$  soliton** : on trouve que si  $\int w \tilde{P}_j = \int w \partial_x \tilde{P}_j = 0$ , alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}_j(t) + \dots$$

- **Cas  $P_j$  breather** : on trouve que si  $\int w \tilde{P}_j = \int w \partial_{x_1} \tilde{P}_j = \int w \partial_{x_2} \tilde{P}_j = 0$ , alors

$$\|w\|_{H^2}^2 \leq C \mathcal{Q}_j(t) + \dots$$

- Dans tous les cas, il y a une condition d'orthogonalité de trop !

## Condition d'orthogonalité de trop

- Pour finir, le but est de montrer que si  $\int (w^2 + w_x^2 + w_{xx}^2) \Phi_j =: \|w\|_{H_{\Phi_j}^2}^2$  atteint un certain seuil, alors  $\int \tilde{P}_j w = m_j[w]$  est suffisamment petite pour que la coercivité soit vérifiée (de plus, c'est utile pour les estimées sur les termes linéaires de la récurrence).
- On développe la masse :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u^2 \Phi_j &= \frac{1}{2} \int \tilde{P}^2 \Phi_j + \int w(t) \tilde{P} \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j \\ &\simeq \frac{1}{2} \sum_{i=j}^J \int \tilde{P}_i^2 + \sum_{i=j}^J \int w(t) \tilde{P}_i + \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j. \end{aligned}$$

- Ainsi, par HR et presque-décroissance de  $M_j$ ,

$$\int w(t) \tilde{P}_j \leq \int w(0) \tilde{P}_j - \frac{1}{2} \int w(t)^2 \Phi_j + \frac{1}{2} \int w(0)^2 \Phi_j.$$



# Condition d'orthogonalité de trop

- Donc,

$$\frac{\int w(t) \tilde{P}_j}{\|w(t)\|_{H_{\Phi_j}^2}} \leq \frac{\|w(0)\|_{H_{\Phi_j}^2}}{\|w(t)\|_{H_{\Phi_j}^2}} + \|w(t)\|_{H_{\Phi_j}^2}.$$

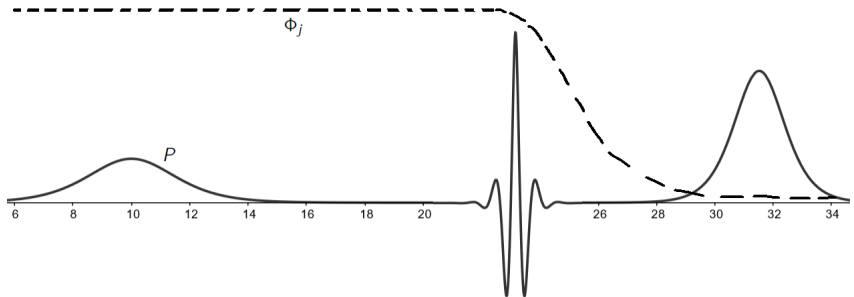
- Pour minorer  $\int w(t) \tilde{P}_j = m_j[w(t)]$ , on utilise l'équation elliptique vérifiée par  $\tilde{P}_j$  pour réécrire  $m_j$  comme une combinaison à coefficients positifs de  $-e_j[w(t)]$  et  $-f_j[w(t)]$ .
- On peut majorer  $e_j[w(t)]$  et  $f_j[w(t)]$  de la même manière qu'on a majoré  $m_j[w(t)]$ . On en déduit que  $\left| \int w(t) \tilde{P}_j \right|$  est suffisamment petite par rapport à  $\|w(t)\|_{H_{\Phi_j}^2}$ .
- Ces étapes permettent aussi de borner les variations de  $m_j$  et  $e_j$  qui sont utiles pour la récurrence.

# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

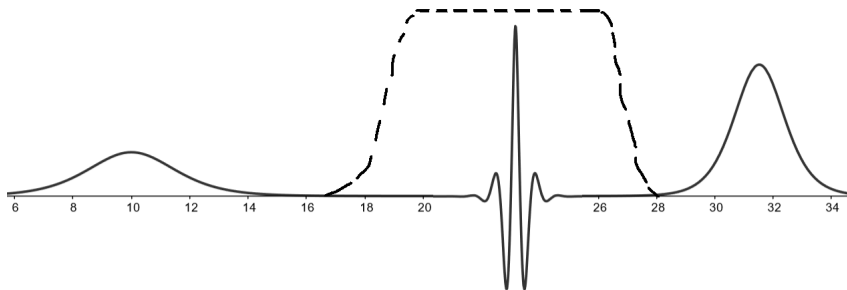
## Pour l'unicité

On procède selon les mêmes idées mais avec des fonctionnelles de Lyapunov presque-croissantes.



## Pour l'existence

Comme on cherche à construire une solution qui converge exponentiellement vers la somme  $P$ , on peut obtenir des fonctionnelles de Lyapunov *presque-constantes*. Ceci nous permet d'obtenir un résultat indépendant du signe des vitesses des objets.



# Sommaire

- 1 Présentation du modèle
  - Introduction du modèle
  - Particularités du modèle
  - Objets considérés
- 2 Résultats connus
  - Stabilité orbitale des solitons et des breathers
  - Pourquoi étudier des sommes de solitons et de breathers ?
- 3 Nouveaux résultats
  - Éléments de preuve : stabilité orbitale d'une somme de solitons et de breathers
  - Ce qui est différent dans les autres preuves
  - Perspectives

# Perspectives

- Théorème de Liouville pour les breathers
- Train infini de breathers ?
- Extension des résultats aux dipôles ?