Filière MP - ENS de Cachan, Lyon, Rennes et Paris - Session 2015

Page de garde du rapport de TIPE

NOM : SEMENOV	Prénoms : Alexander
Classe : MP*1	
Lycée : Louis le Grand	Numéro de candidat : 20400
Ville : Paris	

Concours auxquels vous êtes admissible, dans la banque MP inter-ENS (les indiquer par une croix) :

ENS Cachan	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			
ENS Lyon	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique - Option M		Informatique - Option P	
ENS Rennes	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			
ENS Paris	MP - Option MP		MP - Option MPI	X
	Informatique			

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique		Mathématiques	X	Physique	

Titre du TIPE : Pavages des espaces euclidiens. Théorème de Bieberbach

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	5	Illustration	0	Bibliographie	1

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

Je me suis intéressé au théorème sur la finitude, à isomorphisme près, des groupes paveurs plans (directs), puis au résultat de finitude sur les classes d'isomorphisme des sous-groupes cristallographiques du groupe des isométries d'un espace euclidien (théorème de Bieberbach).

À Paris

Le 9/06/2015

Signature du (de la) candidat(e)

Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline

Nicolas Tosel

Cachet de l'établissement

Pavages des espaces euclidiens

Alexander Semenov

9 juin 2015

Définitions et notations

Soit E un espace euclidien, muni du produit scalaire (|), et de la norme associée ‖ ‖, qu'on munira de sa structure affine canonique. On notera $GL(E)$ le groupe linéaire de E, $O(E)$ le groupe orthogonal de E, $SO(E)$ le groupe spécial orthogonal de E, $Aff(E)$ le groupe affine de E, $Iso(E)$ le groupe des isométries affines de E, $Iso^+(E)$ le groupe des isométries affines directes de E, $T(E)$ le groupe des translations de E. Si g est un élément de $Aff(E)$, on notera $\vec{g}$ sa partie linéaire dans $GL(E)$. Si $u \in E$, on notera $t_u \in T(E)$ la translation de vecteur u.

Si G est un sous-groupe de Aff(E), on notera T_G le sous-groupe de G des translations de G, R_G le sous-groupe de E des vecteurs de translation de G. T_G et R_G sont trivialement isomorphes. On notera $\vec{G} = \{\vec{g} | g \in G\}$.

On appelle réseau de E tout sous-groupe de E de la forme $R = \mathbb{Z}v_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_n$ où $(v_1, ..., v_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Il est classique que si G un sous-groupe discret de E, il existe $(v_1, ..., v_r)$ une famille $\mathbb{R}$-libre de vecteurs de E telle que $G = \mathbb{Z}v_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}v_r$. Donc, les réseaux de E sont les sous-groupes discrets de E qui engendrent E vectoriellement. Les vecteurs courts d'un sous-groupe discret G sont les vecteurs de G non nuls de norme minimale. Une base d'Hermite de R est une $\mathbb{Z}$-base de R $(v_1, ..., v_n)$ telle que v_1 est un vecteur court de R et $\|v_1\| ... \|v_n\| \leq (\frac{2}{\sqrt{3}})^{\frac{n(n-1)}{2}} [v_1, ..., v_n]$ où $[x_1, ..., x_n]$ est la valeur absolue du déterminant euclidien de $(x_1, ..., x_n)$.

Soit R un réseau de E. On note $GL(R) = \{g \in GL(E) | g(R) = R\}$. Ce groupe est isomorphe à l'ensemble des automorphismes de R, et par choix d'une $\mathbb{Z}$-base de R, isomorphe à $GL_n(\mathbb{Z})$.

On note $O(R) = GL(R) \bigcap O(E) = \{g \in O(E) | g(R) \subset R\}$ (car toute isométrie est de déterminant 1 ou -1). En particulier, O(R) est fini.

On appelle sous-groupe cristallographique de Iso(E) tout sous-groupe G de Iso(E) tel que R_G soit un réseau de E. Si G est un sous-groupe cristallographique de Iso(E), on a en particulier que $\vec{G}$ est fini.

Résumé

Ce TIPE s'intéresse à une partie du 18e problème de Hilbert. Ce problème s'intéresse aux pavages de E à l'aide d'un compact d'intérieur non vide (motif fondamental). Réaliser un pavage de l'espace à l'aide d'un motif fondamental K revient à faire agir un sous-groupe G de Iso(E) sur K. Tels sous-groupes de Iso(E) sont très particuliers. Le problème de Hilbert est de montrer que dans Iso(E) il n'y a, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de sous-groupes de Iso(E) à domaine fondamental compact (c'est à dire de sous-groupes permettant de réaliser un pavage). En 1910, Bieberbach a montré que les sous-groupes discrets de Iso(E) à domaine fondamental compact sont les sous-groupes cristallographiques de Iso(E) : c'est le premier théorème de Bieberbach, on l'admettra dans ce TIPE. L'objet du TIPE est donc un problème algébrique qui est d'établir la finitude des sous-groupes cristallographiques de Iso(E) à isomorphisme près. On va d'abord s'intéresser aux pavages du plan, avant de réaliser l'étude générale.

Première partie

Groupes de paveurs plans

E est un plan euclidien dans cette partie. On notera C_k sous-groupe des rotations d'ordre k de E et D_k groupe diédral d'ordre k. Une $\mathbb{Z}$-base d'un réseau plan s'obtient en choisissant un vecteur court v, puis le plus court vecteur qui n'est pas dans le sous-groupe engendré par v. Une $\mathbb{Z}$-base d'un réseau (e_1, e_2) est dite spéciale lorsque $\|e_1\| \leq \|e_2\|$ et $0 \leq (e_1|e_2) \leq \frac{\|e_1\|^2}{2}$.

1 Groupes paveurs plans

On appelle pavage de E tout couple (G,K) où K est un compact d'intérieur non vide de E et G un sous-groupe de Iso(E) tels que :

— $E = \bigcup_{g \in G} g(K)$

— Si $g \neq g'$ sont deux éléments de G, alors $g(\mathring{K}) \bigcap g'(\mathring{K}) = \emptyset$.

On appelle groupe paveur plan un sous-groupe G de Iso(E) tel qu'il existe un compact d'intérieur non vide K tel que (G,K) soit un pavage de E. Le 18e problème de Hilbert dans le plan consiste à établir la finitude des groupes paveurs plans à isomorphisme près.

Soit G un groupe paveur plan. En utilisant que l'action de G sur K doit couvrir tout le plan, on montre que R_G est un réseau de E. Ainsi, un groupe paveur est en particulier un sous-groupe cristallographique de Iso(E). Compte tenu du premier théorème de Bieberbach, il y a équivalence entre les deux notions.

2 Restrictions pour un groupe paveur

Soit G un sous-groupe cristallographique de Iso(E). On a que $\vec{G} \subset O(E)$ stabilise le réseau R_G.

2.1 Forme de $\vec{G}$

$\vec{G}$ est fini est est isomorphe à C_k ou à D_k pour un certain $k \geq 1$.

2.2 Restrictions pour k

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On suppose que la rotation d'ordre k stabilise un réseau R, alors, dans une $\mathbb{Z}$-base du réseau, cette rotation est représentée par une matrice entière. Ceci impose que $cos(\theta)$ doit être un demi-entier. Ainsi, on a nécessairement $k \in D_k\{1, 2, 3, 4, 6\}$, donc au plus 10 classes d'isomorphie pour $\vec{G}$.

2.3 La restriction suffit

En étudiant les isométries qui stabilisent un réseau en fonction de la forme d'une de ses bases spéciales (e_1, e_2), on établit que pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$, il existe un réseau stable par D_k et donc par C_k. En effet,

1. $\|e_1\| < \|e_2\|$ et $0 < (e_1|e_2) < \frac{\|e_1\|^2}{2}$. Alors $O(R) = \{id, -id\} = C_2$
2. $\|e_1\| < \|e_2\|$ et $(e_1|e_2) = 0$. Alors $O(R) = \{id, -id, ref(Vect(e_1)), ref(Vect(e_2))\} = D_2$
3. $\|e_1\| = \|e_2\|$ et $(e_1|e_2) = 0$. Alors $O(R) = D_4$
4. $\|e_1\| = \|e_2\|$ et $0 < (e_1|e_2) < \frac{\|e_1\|^2}{2}$. Alors $O(R) = \{id, -id, ref(Vect(e_1 + e_2)), ref(Vect(e_1 - e_2))\} = D_2$
5. $\|e_1\| < \|e_2\|$ et $(e_1|e_2) = \frac{\|e_1\|^2}{2}$. Alors $O(R) = \{id, -id, ref(Vect(e_1)), ref(Vect(e_2))\} = D_2$
6. $\|e_1\| = \|e_2\|$ et $(e_1|e_2) = \frac{\|e_1\|^2}{2}$. Alors $O(R) = D_6$

En utilisant le fait que toute classe de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{Z})$ contient un groupe de matrices correspondant aux isométries préservant un réseau dans une $\mathbb{Z}$-base de ce dernier (c'est un résultat de la partie 2), cette classification permet de trouver qu'il y a 13 classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_2(\mathbb{Z})$. Un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$ est maximal (pour l'inclusion) si et seulement si il est isomorphe à D_4 ou à D_6.

3 Finitude, à isomorphisme près, des groupes paveurs directs

Il existe un résultat de finitude pour les classes de conjugaison des groupes paveurs du plan : Il y a, à isomorphisme près ou à conjugaison près dans Aff(E), 17 groupes paveurs plans. La preuve de ce résultat étant trop laborieuse, je n'en ai pas étudié la preuve. Dans ce qui suit, on restreint notre étude aux transformations affines directes du plan.

Théorème Il y a, à isomorphisme près ou à conjugaison près dans $Aff^+(E)$, cinq groupes paveurs directs de E. (un sous-groupe paveur est direct lorsqu'il est inclus dans $Iso^+(E)$)

Preuve Soit $k \in \{1,2,3,4,6\}$. On dispose de R_k, un réseau de E tel que C_k est inclus dans $O(R_k)$ (d'après l'étude précédente). Soit G_k un sous-groupe de $Iso^+(E)$ engendré par les translations de vecteurs de R_k et par les éléments de C_k.

G_1, G_2, G_3, G_4, G_6 sont cinq groupes paveurs directs du plan non isomorphes car les ordres de leurs éléments ne correspondent pas.

Soit G un groupe paveur direct du plan. Il reste à montrer que G est conjugué dans $Aff^+(E)$ à l'un des G_k. Soit $k \in \{1,2,3,4,6\}$ tel que $\vec{G} = C_k$, R le réseau des translations de G, $r \in G$ telle que $\vec{r}$ engendre $\vec{G}$ et a le centre de la rotation r. On choisit $f \in Aff^+(E)$ telle que $f(o) = a$ (où o est l'origine de E), $\vec{f}(R_k) = R$ et si $k \in \{3,4,6\}$ $\vec{f}$ est une similitude directe. On a : $f = t_{\vec{oa}} \circ \vec{f}$. Alors : $fG_kf^{-1} = G$.

Deuxième partie

Cas général

Le but de la partie est de donner le cheminement de la preuve du fait qu'il existe à conjugaison près dans Aff(E) qu'un nombre fini de sous-groupes cristallographiques de Iso(E). Ce cheminement établit aussi qu'il y a à isomorphisme près et à conjugaison près autant de sous-groupes cristallographiques de Iso(E).

4 Sous-groupes de Bieberbach

On veut prouver une finitude de sous-groupes cristallographiques de Iso(E) à conjugaison près dans Aff(E). Les bons objets sont les classes de conjugaison dans Aff(E) de sous-groupes cristallographiques de Iso(E). C'est leur finitude qu'on veut prouver. On est donc amené à travailler avec une classe de sous-groupes de Aff(E) plus large que les sous-groupes cristallographiques de Iso(E).

Définition Un groupe G de Aff(E) est dit de Bieberbach lorsque R_G est un réseau de E et $\vec{G}$ est un sous-groupe fini de GL(E) (et donc de $GL(R_G)$).

Propriété Les sous-groupes de Aff(E) conjugués (dans Aff(E)) à un sous-groupe cristallographique de Iso(E) sont exactement les sous-groupes de Bieberbach de Aff(E).

Lemme 1 Soit G un sous-groupe fini de GL(E), alors il existe un produit scalaire sur E pour lequel les éléments de G sont les isométries.

En effet, on pose $[x,y] = \sum_{g \in G}(g(x)|g(y))$.

Lemme 2 Soit G un sous-groupe de GL(E). On a équivalence entre « il existe un produit scalaire sur E pour lequel les éléments de G sont des isométries » et « G est conjugué à un sous-groupe de O(E) ».

Conclusion Ainsi, si G est de Bieberbach, $\vec{G}$ est conjugué à un sous-groupe de O(E), donc G est conjugué à un sous-groupe cristallographique de Iso(E). On peut donc reformuler le théorème à prouver :

Troisième théorème de Bieberbach L'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes de Bieberbach de Aff(E) est fini.

4.1 Sous-groupe des translations

Soit G de Bieberbach. Comme $\vec{G}$ fini, tous ses éléments sont diagonalisables. On l'utilise pour montrer que si $g \in G$ commute à tous les $t_v \circ g^{-1} \circ t_{-v}$ pour $v \in R_G$, alors g est une translation. On en déduit que T_G est l'unique sous-groupe abélien normal maximal de G. On peut aussi caractériser T_G comme l'unique sous-groupe abélien d'indice fini maximal de G.

4.2 Second théorème de Bieberbach

Deux sous-groupes G et H de Bieberbach de Aff(E) sont conjugués dans Aff(E). Plus précisément, un isomorphisme quelconque $\Phi : G \to H$ est une conjugaison par un élément $a \in Aff(E)$.

Vu les caractérisations qu'on a de T_G et de T_H en tant que sous-groupes de G et de H resparcrivement, Φ envoie T_G sur T_H. On introduit alors $f : R_G \to R_H$ un isomorphisme de groupes (qui se prolonge en un élément de GL(E)) tel que $\forall v \in R_G, \Phi(t_v) = t_{f(v)}$. On a donc nécessairement $\vec{a} = f$. On veut donc montrer qu'il existe $u \in E$ tel $a = t_u \circ f$ convient pour la conjugaison.

Soit $u \in E$, on établit par calcul que Φ est la conjugaison par $t_u \circ f$ si et seulement si $\forall g \in G, \Phi(g) \circ f \circ g^{-1} \circ f^{-1} = t_{u - f \circ \vec{g} \circ f^{-1}(u)}$. On définit Ψ par $\forall g \in G, \Psi(g) = \Phi(g) \circ f \circ g^{-1} \circ f^{-1}$. On montre que $\Psi(g)$ est bien une translation pour tout g et qu'elle ne dépend que de $\vec{g}$. On montre l'existence de u en le récupérant en sommant les vecteurs de translation de $\Psi(g)$ pour $\vec{g} \in \vec{G}$.

4.3 Éléments particuliers de la classe de conjugaison d'un sous-groupe de Bieberbach de Aff(E)

On détermine de façon unique le sous-groupe G de Aff(E) en précisant $\vec{G}$, R_G et V_G où $V_G : \vec{G} \to E/R$ telle que pour $\omega \in \vec{G}$, on a $V_G(\omega) = \{v \in E, t_v \circ \omega \in G\}$.

Soit G un sous-groupe de Bieberbach de Aff(E). Il est clair que si on conjugue G par une translation, $R = R_G$ et $\vec{G}$ restent inchangés. En utilisant un argument similaire à celui de la fin de la preuve du second théorème de Bieberbach, on montre qu'il existe $u \in E$ tel que $G^u = t_u \circ g \circ t_{-u}$ soit tel que V_{G^U} soit à valeurs dans $\frac{R}{m}/R$ où $\frac{R}{m} = \{\frac{r}{m}, r \in R\}$. Remarquons que si $a \in E$ est un point spécial de G (i.e. $G = T_G G_a$ où G_a est le stabilisateur de a dans G), en choisisant u=-a, G^u est tel que V_{G^u} est constante égale à R.

5 Théorème de Jordan

Pour étudier les classes de conjugaison de sous-groupes de Bieberbach de Aff(E), on peut commencer par trouver dans ces classes des éléments particuliers. En particulier, si R est un réseau de E, par la transitivité de l'action de GL(E) sur les réseaux, il existe dans toute classe de conjugaison un groupe G tel que $R_G = R$. Ensuite, en conjugant par des éléments de GL(R), $\vec{G}$ parcourt une classe de conjugaison de GL(R) et R_G reste toujours égal à R. On est donc amenés à comprendre les classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$. On dispose d'un résultat de finitude :

Théorème de Jordan L'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$ est fini.

Approche 1 On peut d'abord remarquer que si ρ est la réduction modulo 3 de $GL_n(\mathbb{Z})$ dans $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, alors pour tout sous-groupe G fini de $GL_n(\mathbb{Z})$, $\rho(G)$ est isomorphe à G (théorème de Minkovski). Or, $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est fini, d'où, à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$ (1). On établit ensuite qu'il n'y a, à conjugaison près, qu'un nombre fini de sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ isomorphes à un sous-groupe fini G donné. Pour avoir ce résultat, on peut établir la finitude des images des représentations de G dans $GL_n(\mathbb{C})$ à équivalence près, ce qui suffit car les images de deux représentations équivalentes sont conjuguées. Soit $\rho_1, ..., \rho_s$ le système des représentations irréductibles deux à deux non équivalentes de G (s est le nombre de classes de conjugaison pour les éléments de G) et d_i le degré de ρ_i pour $1 \leq i \leq s$. Il y a, à équivalence près autant de représentations de G que de $(n_1, ..., n_s) \in \mathbb{N}^s$ tels que $n_1 d_1 + ... + n_s d_s = n$, et ce dernier nombre est fini. Or, si G_1 et G_2 sont deux sous-groupes de $GL_n(\mathbb{Q})$ conjugués dans $GL_n(\mathbb{C})$, alors ils sont conjugués dans $GL_n(\mathbb{Q})$ (inertie de la similitude). Donc, à conjugaison près, il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de $GL_n(\mathbb{Q})$ isomorphes à un groupe fini G (2). Enfin, si G est un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Q})$, alors il existe un réseau $R \subset \mathbb{Q}^n$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $G \subset GL(R)$. Comme $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{Q}^n$ est un réseau de $\mathbb{R}^n$, on en déduit que G est conjugué dans $GL_n(\mathbb{Q})$ à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{Z})$ (3). Par (1), (2) et (3), on en déduit que l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Q})$ est fini. Cependant, en déduire le théorème de Jordan n'est pas banal. On va plutôt le montrer avec l'approche 2.

Approche 2 On montre que le théorème de Jordan est équivalent à : « Il existe c_n tel que pour tout réseau R de E, tout sous-groupe fini G de GL(R), on peut trouver une $\mathbb{Z}$-base de R dans laquelle les éléments de G ont des matrices dont les coefficients sont bornés par c_n. »

Il reste à montrer ce théorème. Soit R un réseau et G un sous-groupe fini de GL(R). On montre d'abord qu'il existe un produit scalaire B sur E, de norme associée N, tel que les éléments de G sont B-isométriques, $\forall x \in R\backslash\{0\}, N(x) \geq 1$ et $Vect\{x \in R, N(x) = 1\} = E$. On munit ensuite E d'un tel produit scalaire et on prouve qu'on choisissant une base d'Hermite de R, la propriété est vraie avec $c_n = (\frac{2}{\sqrt{3}})^{n(n-1)}$, en utilisant l'inégalité d'Hermite et l'inégalité d'Hadamard.

6 Fin de la preuve du troisième théorème de Bieberbach

Soit R un réseau de E. D'après le théorème de Jordan, l'ensemble des classes de conjugaison de sous-groupes finis de GL(R) est fini. Soit $(H_1, ..., H_s)$ un système de sous-groupes finis de GL(R) tel que pour chaque classe de conjugaison de sous-groupes finis de GL(R), il existe un unique $1 \leq i \leq s$ tel que H_i fait partie de cette classe de conjugaison.

Soit G un sous-groupe de Bieberbach de Aff(E). On sait déjà que G est conjugué à G_1 telle que $R_{G_1} = R$. Puis, on dispose de $1 \leq i \leq s$ tel que $\vec{G_1}$ est conjugué à H_i, donc G_1 est conjugué à G_2 tel que $R_{G_2} = R$ et $\vec{G_2} = H_i$. Puis (d'après 4.3), il reste à conjuguer par une translation pour obtenir G_3 avec $R_{G_3} = R$, $\vec{G_3} = H_i$ et V_{G_3} est à valeurs dans $\frac{R}{m}/R$.

Or, pour $1 \leq i \leq s$ il existe un nombre fini d'applications de H_i dans $\frac{R}{m}/R$, il existe aussi qu'un nombre fini de sous-groupes de GL(R) égaux à un des H_i. Donc, il n'existe qu'un nombre fini de sous-groupes G de Aff(E) tels que $R_G = R$, $\vec{G} = H_i$ pour un certain i et V_G est à valeurs dans $\frac{R}{m}/R$. Comme tout sous-groupe de Bieberbach est conjugué à un sous-groupe de Aff(E) de cette forme, on a la finitude de classes de conjugaison de sous-groupes de Bieberbach de Aff(E).

On a donc le résultat voulu : **finitude à conjugaison près (dans Aff(E)) de sous-groupes cristallographiques de Iso(E).**

On peut comparer cette preuve à celle des paveurs plans directs. Celle des paveurs plans directs est d'un côté plus simple, parce que tout groupe paveur plan direct admet un point spécial, ce qui fait qu'on peut rendre V_G constante égale à G, mais d'un autre côté plus compliquée car on n'a pas utilisé les sous-groupes de Bieberbach de Aff(E), ce qui explique pourquoi on a besoin d'imposer que la transformation affine qui réalise la conjugaison soit une similitude directe.

Bibliographie

- Marcel Berger, *Géométrie,* Tome 1 (Nathan, 1990): Chapitre 1
- Nicolas Tosel, *Réseaux et théorèmes de finitude* I (Revue de la filière mathématique, RMS 115-2, 19 octobre 2009)
- Nicolas Tosel, *Réseaux et théorèmes de finitude* II (Revue de la filière mathématique, RMS 115-3, 19 octobre 2009)