# Mémoire de M2 : Problèmes de stabilité des solitons et des breathers

Alexander Semenov, sous la direction de Raphaël Côte

7 octobre 2018

**Résumé**

Nous allons regrouper dans ce mémoire les résultats de stabilité qui ont été établis sur certaines solutions de quelques équations évolution (l'équation de Schrödinger non linéaire et l'équation de Korteweg-de Vries, en occurence) : les solitons et les breathers. Pour l'équation de Schrödinger linéaire, toute solution est soumise au phénomène de dispersion : en termes physiques, cela signifie que les fréquences différentes de la solution se propagent à des vitesses différentes ; on le formulera en termes mathématiques et en déduira que la solution tend vers 0 localament en norme L2. Pour l'équation de Schrödinger non linéaire, des phénomènes plus compliqués peuvent apparaître : il y a le phénomène de concentration de la masse de la solution en un point, ce qui fait qu'une solution peut exploser en temps fini dans le cas non linéaire. On peut alors voir un soliton comme une solution qui réalise un équilibre entre la dispersion et la concentration. Dans le cas de Schrödinger non linéaire, un soliton est une onde stationnaire dont la phase bouge à vitesse constante en temps. Pour l'équation de Korteweg-de Vries, un soliton est une onde qui se propage à vitesse constante sans déformation. On pourra établir alors un résultat de stabilité d'un soliton à un groupe de transformations près (une solution dont l'état initial est proche d'un soliton considéré, sera toujours proche du soliton à un groupe de transformations près). Dans une 2e partie, on étudiera la stabilité de solutions plus générales d'une équation de Korteweg-de Vries : les breathers. Il s'agit de solutions qui correspondent à une fonction périodique en temps et qui se propagent à vitesse constante.

## Table des matières

## Première partie

# Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéressera aux solutions des équations suivantes :

— L'équation de Schrödinger non linéaire, dont la non-linéarité est une fonction puissance (avec $p > 1$)

$$(NLS) \left\{ \begin{array}{ll} i\partial_t u + \Delta u + \epsilon u|u|^{p-1} = 0, & (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}^d,\ u(t,x) \in \mathbb{C} \\ u(0,x) = u_0(x) & \end{array} \right.$$

— L'équation de Schrödinger linéaire $(LS)$ est un cas particulier de $(NLS)$ où $\epsilon = 0$

— Dans le cas où $\epsilon \neq 0$, on est bien dans le cas non-linéaire. Et quitte à multiplier $\epsilon$ par une constante multiplicative, on se ramène au cas $\mid \epsilon \mid= 1$. On dit que la non-linéarité est *focalisante* pour le cas $\epsilon = 1$ (dans ce cas, on verra qu'une solution peut exploser, et qu'il existe des solutions sous forme de solitons. C'est donc le cas qui nous intéressera), *défocalisante* pour le cas $\epsilon = -1$ (dans ce cas, le comportement des solutions ressemble à celui des solutions linéaires. C'est donc un cas qui nous intéressera peu)

— L'équation de Korteweg-de Vries modifiée

$$(mKdV) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u + \partial_x(\partial_{xx} u + u^3) = 0 & (t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R},\ u(t,x) \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \end{array} \right.$$

### 0.1 Notations

— Pour une fonction $u$ dépendant du temps et de l'espace, définie sur $[0,T]$ pour $T > 0$ en temps, on définit la norme :

$$\|u\|_{L^p_T L^q_x} := (\int_0^T \|u(t,\cdot)\|^p_{L^q} dt)^{1/p}$$

Cette définition s'étend comme d'habitude à $p = \infty$.

— En dimension $d \geq 2$, on considère l'espace $H^1_r$ des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ qui sont radiales, i.e. $u(x) \equiv \tilde{u}(r)$ avec $r = |x|$ et $\tilde{u} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$. On identifiera $u \in H^1_r$ et son représentant $\tilde{u}$.

— On note $2^*$ l'exposant tel qu'on a l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^{2^*}$. On a

$$2^* := \begin{cases} +\infty & d = 2 \\ \frac{2d}{d-2} & d \geq 3 \end{cases}$$

— $\|\cdot\|$ désigne la norme $L^2$.

## 0.2 Quelques résultats préliminaires

### 0.2.1 Compacité de $H^1_r$ dans $L^p$, $2 < p < 2^*$

**Proposition 1.** *Soit $d \geq 2$. Alors, pour tout $2 < p < 2^*$, l'injection $H^1_r \hookrightarrow L^p$ est compacte.*

*Remarque* 2. Toutefois, $H^1_r \hookrightarrow L^{2^*}$ n'est pas compacte.

### 0.2.2 Lemme de concentration-compacité (P.-L. Lions, cf [5])

**Lemme 3.** *Soit $(u_n)$ une suite bornée dans $H^1$ avec $\int |u_n|^2 dx \to M$. Alors, il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'une des propriétés suivantes :*

*(i)* Compacité à translation près : *il existe $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\forall 2 \leq q < 2^*,\ u_{n_k}(\cdot - y_k) \to u \textit{ dans } L^q \textit{ quand } k \to +\infty$$

*(ii)* Évanescence :

$$\forall 2 < q < 2^*,\ u_{n_k} \to 0 \textit{ dans } L^q \textit{ quand } k \to +\infty$$

*(iii)* Dichotomie : *il existe $(v_k)$ et $(w_k)$ deux suites bornées dans $H^1$ à support compact, et $\alpha \in ]0,1[$ tels que :*

$$\begin{gathered} Supp(v_k) \bigcap Supp(w_k) = \emptyset,\ \textit{et } d(Supp(v_k), Supp(w_k)) \to +\infty \textit{ quand } k \to +\infty \\ \int |v_k|^2 dx \to \alpha M \textit{ et } \int |w_k|^2 dx \to (1-\alpha) M \textit{ quand } k \to +\infty \\ \forall 2 \leq q < 2^*,\ \int |u_{n_k}|^q dx - \int |v_k|^q dx - \int |w_k|^q dx \to 0 \textit{ quand } k \to +\infty \\ \liminf_{k\to+\infty} \left(\int |\nabla u_{n_k}|^2 dx - \int |\nabla v_k|^2 dx - \int |\nabla w_k|^2 dx\right) \geq 0 \end{gathered}$$

### 0.2.3 Lemme utile

**Lemme 4.** *Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $|Q| \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et :*

$$\int (\nabla |Q|)^2 \leq \int |\nabla Q|^2$$

*En outre, si $Q^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ est un ouvert connexe alors on a égalité si et seulement si il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u = |u|e^{i\gamma}$.*

### 0.2.4 Identités de Pohozaev et identités associées

**Lemme 5.** *Pour $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles,*

$$\begin{array}{l}\int \Delta u(\frac{d}{2}u + x\cdot\nabla u)dx = -\int |\nabla u|^2 dx \\ \int u(\frac{d}{2}u + x\cdot\nabla u)|u|^{q-2} = (\frac{d}{2}-\frac{d}{q})\|u\|_{L^q}^q \quad \text{où}\, q \geq 2\end{array}$$

# 1 Dispersion dans l'équation de Schrödinger linéaire

## 1.1 Quelques faits sur la résolution de (LS)

**Théorème 6.** *a) Posons $K(t,x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{d/2}}\exp(\frac{i|x|^2}{4t})$ pour $t \neq 0$ et $K(0,x) = \delta_0(x)$.*

*Alors $\hat{K}(t,\xi) = \exp(-it|\xi|^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$.*

*b) Soit $u_0 \in S(\mathbb{R}^d)$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $u(t) = K(t) *_x u_0 = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{K}(t)\widehat{u_0})$.*

*Alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^d))$ et $u$ est solution de $(LS)$.*

*De plus, c'est l'unique solution de $(LS)$ dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$.*

*Démonstration.* cf [1] □

**Définition 7.** Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $S(t) : u_0 \in S'(\mathbb{R}^d) \longmapsto \mathcal{F}^{-1}(\widehat{K}(t)\widehat{u_0}) \in S'(\mathbb{R}^d)$

*Remarque* 8. Les notations $S(t)$ et $e^{it\triangle}$ sont équivalentes.

$S(t) : u_0 \in S(\mathbb{R}^d) \longmapsto u(t)\ solution\, de\, (LS)$

En particulier, on sait que $S(t) : S(\mathbb{R}^d) \longrightarrow S(\mathbb{R}^d)$.

**Lemme 9.** *Soit $u_0 \in S(\mathbb{R}^d)$ et $f \in C(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^d))$, alors l'unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^d))$ du problème inhomogène*

$$(NHLS)\left\{\begin{array}{l} i\partial_t u + \triangle u = f \\ \quad u_{|t=0} = u_0\end{array}\right.$$

*est donnée par la formule de représentation de Duhamel :*

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-t')f(t')dt'$$

*Démonstration.* Résoudre l'équation en Fourier, cf [1]. □

On peut étendre les résultats ci-dessus à des données initiales plus générales. Pour cela, on a besoin d'une notion de solution plus générale.

**Définition 10.** Soit $u_0 \in S'(\mathbb{R}^d)$. On dira qu'une distribution $u \in C([0,T[, S'(\mathbb{R}^d))$ est *solution faible* du problème inhomogène $(NHLS)$ lorsque pour tout $\varphi \in C^1([0,T[, S(\mathbb{R}^d))$ et pour tout $t \in [0,T[$, on a

$$\int_0^t \langle u(t'), \Delta\varphi(t') - i\partial_t\varphi(t')\rangle\, dt' = i\,\langle u_0, \varphi(0)\rangle - i\,\langle u(t), \varphi(t)\rangle + \int_0^t \langle f(t'), \varphi(t')\rangle\, dt'$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $S'$ et $S$.

**Théorème 11.** *Soit $u_0 \in S'(\mathbb{R}^d)$. Alors $(LS)$ admet une unique solution faible $u \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^d))$.*

*Cette solution est donnée par $u(t) = S(t)u_0$.*

*Démonstration.* cf [1]. □

*Remarque* 12. Le même résultat est vrai pour l'équation de Schrödinger linéaire non homogène avec $f \in C(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^d))$.

## 1.2 Le groupe de l'équation de Schrödinger

Les résultats suivants sont issus de [2].

**Théorème 13.** *Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe fortement continu d'opérateurs unitaires sur $H^s(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire que l'on a les propriétés suivantes :*

*- Régularité : $t \mapsto S(t)u_0 \in C(\mathbb{R}, H^s)$.*

*- Isométrie $H^s$ : $\|S(t)u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$.*

*- Propriété de groupe : $\forall (t,t') \in \mathbb{R}^2$, $S(t)S(t')u_0 = S(t+t')u_0$ et $S(0) = Id$.*

*- Calcul de l'adjoint : $S(t)^* = S(-t)$ où l'adjoint est pris au sens de la structure hilbertienne de $H^s$.*

**Théorème 14.** *Soit $t \in \mathbb{R}^*$ et $p \in [2, +\infty]$, alors $S(t)$ est un opérateur continu de $L^{p'}$ dans $L^p$ et*

$$\|S(t)u_0\|_{L^p} \leq \frac{1}{|4\pi t|^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}} \|u_0\|_{L^{p'}}$$

*Démonstration.* Utiliser le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. □

## 1.3 Estimations de Strichartz

On donne ici des résultats classiques sur l'équation de Schrödinger linéaire dont la démonstration peut être trouvée dans [1] ou [2].

**Théorème 15.** *Soit $(p,q) \in ]2, +\infty] \times [2, +\infty[$ tels que*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$$

*(on dit que $p$ et $q$ sont des exposants admissibles)*

*Il existe une constante $C_{p,q}$ telle que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|S(t)u_0\|_{L^p(L^q)} \leq C_{p,q} \|u_0\|_{L^2}$$

**Théorème 16.** *Soit $(p,q), (\bar{p}, \bar{q}) \in [2, +\infty]^2$ deux couples d'entiers admissibles, c'est-à-dire tels que $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{2}{\bar{p}} + \frac{d}{\bar{q}} = \frac{d}{2}$, avec $p > 2$ ou $\bar{p} > 2$.*

*Alors il existe une constante $C_{p,q,\bar{p},\bar{q}}$ telle que pour $u_0 = 0$, $T > 0$, $f \in L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^d))$ et $u(t)$ la solution de $(NHLS)$,*

$$\|u(t)\|_{L^p([0,T], L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^d))}$$

# 2 Problème de Cauchy pour $(NLS)$

## 2.1 Résolution locale du problème de Cauchy pour $(NLS)$ dans le cas $\dot{H}^1$-sous-critique

Le résultat suivant est issu de [2].

**Théorème 17.** *Soit $d \geq 1$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$.*
*Supposons que l'entier $p$ vérifie*

$$(*) \quad 1 < p < \begin{cases} +\infty & si\ d = 1, 2 \\ \frac{d+2}{d-2} & si\ d \geq 3 \end{cases}$$

*Alors il existe un temps $T > 0$ tel que le problème de Cauchy $(NLS)$ admette une unique solution maximale dans l'espace $C([0, T[, H^1)$.*

*En outre, il existe deux constantes strictement positives $C$ et $\alpha$ ne dépendant que de $p$ et de $d$ telles que*

$$T \geq C \|u_0\|_{H^1}^{-\alpha}$$

*Enfin, on a le critère d'explosion :*

$$T < +\infty \implies \lim_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty$$

*Démonstration.* On remarque que $u$ est solution de $(NLS)$ si et seulement si $u$ est un point fixe pour l'application $\Phi$ (elle donne la solution du problème non homogène où la non-homogénéité correspond à la non-linéarité du problème non linéaire) :

$$\Phi(u)(t,x) = S(t)u_0(x) + i\epsilon \int_0^t S(t-s)(u(s,x)|u(s,x)|^{p-1})ds$$

Pour l'exemple, on va expliciter la preuve pour les cas $d = 2$ et $p = 3$.
**Étape 1 : existence d'une solution**
Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et le problème de Cauchy $(NLS)$.
On introduit la norme

$$\|u\|_{S_T} = \max\{\|u\|_{L^\infty_T L^2_x}, \|u\|_{L^3_T L^6_x}\}$$

. On introduit l'espace

$$X_T = \{u, \|u\|_{X_T} = \|u\|_{S_T} + \|\nabla u\|_{S_T} < +\infty\}$$

.

On montre d'abord que $\Phi$ est contractante en temps petit. Plus précisément, il existe des constantes $C_1, C_2 > 1$ telles que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, si

$$0 < T < \frac{C_1}{\|u_0\|_{H^1}^6} \quad \text{et} \quad \overline{B_T} = \{u \in X_T, \|u\|_{X_T} \leq C_2 \|u_0\|_{H^1}\}$$

alors $\Phi : \overline{B_T} \longrightarrow \overline{B_T}$ est strictement contractante.

En effet, $\Phi$ est bien définie sur $X_T$. Soit $u, v \in X_T$,

$$\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t) = i\epsilon \int_0^t S(t-s)(u(s,x)|u(s,x)|^2 - v(s,x)|v(s,x)|^2)ds$$

On remarque qu'en dimension $d = 2$, les paires $(\infty, 2)$ et $(3, 6)$ sont admissibles (ceci justifie le choix de la norme $S_T$), donc d'après Strichartz,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{S_T} \lesssim \|u|u|^2 - v|v|^2\|_{L^1_T L^2_x}$$

D'après un argument de Hölder généralisé, on obtient,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{S_T} \lesssim \|u - v\|_{L^3_T L^6_x} (\|u\|^2_{L^3_T L^6_x} + \|v\|^2_{L^3_T L^6_x})$$

De même,

$$\begin{aligned}\|\nabla\Phi(u) - \nabla\Phi(v)\|_{S_T} &\lesssim \|\nabla(u - v)\|_{L^3_T L^6_x} (\|u\|^2_{L^3_T L^6_x} + \|v\|^2_{L^3_T L^6_x}) \\ &\quad + \|u - v\|_{L^3_T L^6_x} (\|\nabla u\|_{L^3_T L^6_x} + \|\nabla v\|_{L^3_T L^6_x})(\|u\|_{L^3_T L^6_x} + \|v\|_{L^3_T L^6_x})\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X_T} \lesssim \|u - v\|_{X_T} (\|(u, \nabla u)\|_{L^3_T L^6_x} + \|(v, \nabla v)\|_{L^3_T L^6_x})(\|u\|_{L^3_T L^6_x} + \|v\|_{L^3_T L^6_x})$$

D'après les injections de Sobolev en dimension 2, $\|u\|_{L^3_T L^6_x} \lesssim \|u\|_{L^3_T H^1_x} \lesssim T^{1/3}\|u\|_{L^\infty_T H^1_x} \lesssim T^{1/3}\|u\|_{X_T}$.

On en déduit qu'il existe une constante universelle $c_1 > 0$ telle que

$$\forall (u, v) \in X_T \times X_T \ \|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X_T} \leq c_1 T^{1/3} (\|u\|^2_{X_T} + \|v\|^2_{X_T}) \|u - v\|_{X_T}$$

À partir de là, on a tous les éléments nécessaires pour trouver les bonnes constantes $C_1, C_2, T$ pour que $\Phi$ soit strictement contractante.

On peut par exemple choisir $T = \frac{C_1}{2\|u_0\|^6_{H^1}}$. Alors le théorème du point fixe de Picard dans l'espace métrique complet $(\overline{B_T}, \|.\|_{X_T})$ assure que $\Phi$ admet un unique point fixe dans $\overline{B_T}$.

On a donc montré l'existence d'une solution, mais dans un espace plus large que celui qui nous intéresse, dans l'espace $X_T$.

**Étape 2 : Régularité d'une solution**

Soit $v \in C([0, T], H^1)$. Avec la représentation explicite côté Fourier, $S(t)v(t) \in C([0, T], H^1)$.

Or, $u = \Phi(u) = S(t)[u_0 + i\epsilon\Phi_1(u)(t)]$ avec $\Phi_1(u)(t) = \int_0^t S(-s)(u(s)|u(s)|^2)ds$

Pour montrer que $u \in C([0, T], H^1)$, il suffit de montrer que $u \in X_T \Rightarrow \Phi_1(u) \in C([0, T], H^1)$.

Cela se montre grâce aux inégalités de Hölder et aux injections de Sobolev.

**Étape 3 : Unicité d'une solution**

Soit $u \in C([0,T],H^1)$ une solution du problème de Cauchy $(NLS)$. Soit $v \in C([0,T],H^1)$ une autre solution. Soit $M$ une borne commune à $\|u\|_{L^\infty_T H^1_x}$ et $\|v\|_{L^\infty_T H^1_x}$.

On a :

$$\begin{aligned}\|v|v|\|_{L^1_T L^2_x} &\lesssim \|\|v\|^3_{L^6_x}\|_{L^1_T} \quad \text{(Hölder)} \\ &\lesssim T\|v\|^3_{L^\infty_T L^6_x} \\ &\lesssim T\|v\|^3_{L^\infty_T H^1_x} \quad \text{(Sobolev)}\end{aligned}$$

Donc, $v|v|^2 \in L^1_T L^2_x$.

On rappelle que $v$ est donnée par la formule de Duhamel : $v = \Phi(v)$.

Or, $L^\infty_T H^1_x \subseteq L^\infty_T L^6_x$ par injection de Sobolev. Donc, pour $T_0 \in ]0,T]$,

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x} &= \|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{L^3_{T_0} L^6_x} \\ &\lesssim \|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x}(\|u\|^2_{L^3_{T_0} L^6_x} + \|v\|^2_{L^3_{T_0} L^6_x}) \\ &\lesssim T_0^{2/3}\|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x}(\|u\|^2_{L^3_{T_0} L^6_x} + \|v\|^2_{L^3_{T_0} L^6_x}) \\ &\lesssim T_0^{2/3} M^2 \|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x}\end{aligned}$$

Il existe donc une constante universelle $c > 0$ telle que $\|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x} \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_{L^3_{T_0} L^6_x}$ avec $T_0 := \min(\frac{c}{M^3}, T)$.

Donc, $u = v$ sur $[0, T_0]$.

Étant donné que $T_0$ ne dépend que d'une borne $H^1$ des deux solutions sur $[0,T]$, on peut reprendre le raisonnement à partir de $T_0$. On a donc bien unicité sur $[0,T]$.

**Étape 4 : Critère d'explosion**

Soit $u \in C([0,T[,H^1)$ une solution maximale telle que $T < \infty$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $+\infty > M > 0$ tel que $\forall t \in [0,T[,\ \|u(t)\|_{H^1} \leq M$.

Alors, pour tout $t_0 \in [0,T[$, on peut construire une solution de $(NLS)$ avec donnée $u(t_0)$ en $t = t_0$ sur un intervalle de temps de longueur $CM^{-6}$ où $C$ constante universelle. Contradiction. □

## 2.2 Symétries et lois de conservation pour $(NLS)$

Les résultats de cette sous-section peuvent être trouvés dans [1] ou [2].

Tout d'abord, on vérifie facilement les symétries suivantes de $(NLS)$ :

**Proposition 18.** *Soit $u_0 \in H^1$ et $u \in C([0,T[,H^1)$ la solution de $(NLS)$. Alors les transformations suivantes de la donnée initiale induisent les transformations de la solution données par :*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *– SCALING* : | $\forall\lambda > 0,$ | $\lambda^{\frac{2}{p-1}}u_0(\lambda x)$ | $\rightsquigarrow$ | $\lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ |
| *– TRANSLATION* : | $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d,$ | $u_0(x+x_0)$ | $\rightsquigarrow$ | $u(t, x+x_0)$ |
| *– PHASE* : | $\forall\gamma \in \mathbb{R},$ | $u_0(x)e^{i\gamma}$ | $\rightsquigarrow$ | $u(t,x)e^{i\gamma}$ |
| *– GALILÉE* : | $\forall\beta \in \mathbb{R}^d,$ | $u_0(x)e^{i\beta\cdot x}$ | $\rightsquigarrow$ | $u(t, x-2\beta t)e^{i\beta\cdot(x-\beta t)}$ |

L'équation $(NLS)$ admet une solution locale dans le cas $\dot{H}^1$-sous-critique. Nous allons expliquer ce que cela veut dire en définissant le paramètre de scaling.

**Définition 19.** Le **scaling** associé à $(NLS)$ est l'exposant $s_c$ tel que le changement d'échelle $u(t,x) \rightsquigarrow u_\lambda(t,x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ laisse invariante la norme de Sobolev homogène $\dot{H}^{s_c}$ :

$$\|u_\lambda(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}} = \|u(\lambda^2 t,\cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}}$$

*Remarque* 20. Par calcul, on trouve $s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$.

*Remarque* 21. Dans le théorème sur l'existence d'une solution locale de $(NLS)$, la condition $(*)$ sur $p$ est équivalente à $s_c < 1$. On dit alors que $(NLS)$ est $\dot{H}^1$-sous-critique.

**Exemple 22.** Pour $p = 3$ et $d = 2$ (c'est le cas qu'on a considéré pour la preuve), on a $s_c = 0$ et on dit que l'équation est $L^2$-critique.

On trouve que $(NLS)$ admet un certain nombre de lois de conservation. On peut facilement démontrer les identités suivantes par calcul formel en supposant que la solution est régulière et décroissante à l'infini. Pour le cas général, il faut utiliser un argument de densité et de passage à la limite, mais ceci est plus sophistiqué.

**Proposition 23.** *Soit $u_0 \in H^1$ et $u \in C([0,T[, H^1)$ la solution de $(NLS)$. Alors, pour tout $t \in [0,T[$ :*
*- CONSERVATION DE LA MASSE :*

$$H(u(t)) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 dx = H(u_0)$$

*- CONSERVATION DE L'ÉNERGIE :*

$$\begin{aligned} E(u(t)) &:= \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 dx - \frac{\epsilon}{p+1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{p+1} dx \\ &= E(u_0) \end{aligned}$$

*- CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE :*

$$\begin{aligned} M(u(t)) &:= \Im\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \nabla u(t,x)\overline{u(t,x)} dx\Big) \\ &= M(u_0) \end{aligned}$$

*Remarque* 24. La condtion $(*)$, i.e. la condition $\dot{H}^1$-sous-critique est équivalente à $p+1 < \frac{2d}{d+2} = 2^*$ où $\dot{H}^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ pour $d \geq 3$. Ainsi, l'énergie $E(u)$ définie ci-dessus est bien finie pour $u \in H^1$. Les deux autres lois de conservation sont bien définies aussi et on voit que $H^1$ est l'espace de régularité de Sobolev minimale pour lequel les trois lois de conservation de $(NLS)$ ont un sens. On dit que $H^1$ est l'**espace d'énergie**. C'est la raison pour laquelle on étudie le problème de Cauchy sur cet espace.

## 2.3 Critère d'existence globale pour le problème de Cauchy pour $(NLS)$

On verra que dans le cas de non-linéarités défocalisantes, il n'y a aucun problème pour avoir l'existence globale pour le problème de Cauchy. Dans le cas de non-linéarités focalisantes, on n'a le résultat d'existence globale que dans le cas $L^2$-sous-critique (c'est-à-dire dans le cas où la non-linéarité est suffisament faible). Cette condition est d'ailleurs optimale : pour tout $s \geq 0$, dans le cas $H^s$-critique, il existe des solutions qui explosent en temps fini. On peut remarquer que la terminologie désignant les non-linéarités est bien choisie : « défocalisant » sous-entend que la matière se disperse donc pas d'explosion possible ; « focalisant » sous-entend que la matière à tendance à se regrouper au même endroit, ce qui rend les explosions des solutions possibles dans le cas général. Le résultat suivant est issu de [2].

**Théorème 25.** *Soit $d \geq 1$ et $p > 1$ tel que $s_c < 1$. Supposons que l'on est dans un des cas suivants :*

*- NON-LINÉARITÉ DÉFOCALISANTE, ÉNERGIE SOUS-CRITIQUE :* $\epsilon = -1$, $s_c < 1$

*- NON-LINÉARITÉ FOCALISANTE, MASSE SOUS-CRITIQUE :* $\epsilon = 1$, $s_c < 0$

*Alors, pour tout $u_0 \in H^1$, la solution du problème de Cauchy $(NLS)$ donnée par le théorème local est globale et bornée dans $H^1$ :*

$$T = +\infty \quad et \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_{H^1} \leq C(u_0)$$

*où $C$ ne dépend que de certaines normes de $u_0$.*

*Démonstration.* Soit $u_0 \in H^1$ et $u \in C([0, T[, H^1)$ la solution maximale. Il suffit de contrôler $\|u(t)\|_{H^1}$ uniformément en temps en fonction de $u_0$.

**Cas défocalisant**

On utilise

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 dx \leq E(u(t)) = E(u_0)$$

et la conservation de la masse. On en déduit que $\|u(t)\|_{H^1}^2$ est majorée par $2E(u_0) + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 dx$.

**Cas focalisant**

Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on peut écrire :

$$\|u\|_{L^{p+1}} \leq C \|u\|_{L^2}^{1-\sigma} \|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma}$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(u_0) = E(u) &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C \|u\|_{L^2}^{(p+1)(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2}^{(p+1)\sigma} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C \|u_0\|_{L^2}^{(p+1)(1-\sigma)} \|\nabla u\|_{L^2}^{(p+1)\sigma} \end{aligned}$$

On a :

$$s_c < 0 \Longleftrightarrow (p+1)\sigma = \frac{d(p-1)}{2} < 2$$

Donc, la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - C\|u_0\|_{L^2}^{(p+1)(1-\sigma)} x^{(p+1)\sigma}$$

diverge vers $+\infty$ quand $x \longrightarrow +\infty$. Mais, on a la conservation de l'énegie, ceci contrôle $\|\nabla u\|_{L^2}$. La conservation de la masse contrôle $\|u\|_{L^2}$. □

### 2.4 Scattering pour $(NLS)$ défocalisant

Il existe un résultat sophistiqué qui dit, avec une certaine hypothèse de régularité sur la condition initiale, ainsi que sur la taille de la non-linéarité, la solution de $(NLS)$ défocalisant se disperse en temps long. Plus précisément, lorsque $t \longrightarrow +\infty$, la solution de $(NLS)$ tend en norme $L^2$ vers une solution du problème linéaire correspondant.

Ainsi, dans le cas défocalisant, le comportement des solutions en temps long est quasiment le même que celui des solutions du problème linéaire. Il n'y a pas espoir d'avoir des solitons dans le cas défocalisant.

On supposera donc que $\epsilon = +1$ par la suite.

## 3 Problème de Cauchy pour $(mKdV)$

Dans la dernière partie de ce mémoire, on s'intéressera à l'équation $(mKdV)$ présentée au tout début de ce mémoire.

### 3.1 Existence locale

Le théorème suivant est issu de l'article [13].

**Théorème 26.** *Soit $s \geq 1/4$. Pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, il existe $T = T(\|D_x^{1/4}u_0\|_{L^2}) > 0$ (avec $T(\rho) \to 0$ quand $\rho \to 0$) et une unique solution $u(t)$ de $(mKdV)$ telle que*

$$(C)\ \left\{\begin{array}{c} u \in C([-T,T], H^s(\mathbb{R})) \\ \|D_x^s \frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_x^\infty L_T^2} < +\infty \\ \|\frac{\partial u}{\partial x}\|_{L_x^{20} L_T^{5/2}} < +\infty \\ \|D_x^{1/4} u\|_{L_x^5 L_T^{10}} < +\infty \\ \|u\|_{L_x^4 L_T^\infty} < +\infty \end{array}\right.$$

*Pour tout $T' \in ]0,T[$, il existe un voisinnage $V$ de $u_0$ dans $H^s(\mathbb{R})$ tel que l'application $\widetilde{u_0} \mapsto \widetilde{u}(t)$ de $V$ à la classe définie par $(C)$ avec $T'$ à la place de $T$ est lipschitzienne.*

### 3.2 Symétries et lois de conservation pour $(mKdV)$

On commence par donner les symétries de $(mKdV)$. La proposition suivante est issue du chapitre 4 de [3].

**Proposition 27.** *Soit $s \geq 1/4$. Soit $u_0 \in H^s$ et $u \in C([-T,T],H^s(\mathbb{R}))$ la solution de $(mKdV)$. Alors les transformations suivantes de la donnée initiale induisent les transformations de la solution données par :*

$$\begin{array}{cccccc} -TRANSLATION: & \forall x_0 \in \mathbb{R}, & u_0(x+x_0) & \rightsquigarrow & u(t,x+x_0) \\ -SYM\acute{E}TRIE\,CENTRALE: & & u_0(-x) & \rightsquigarrow & u(-t,-x) \\ -SYM\acute{E}TRIE\,AXIALE: & & -u_0(-x) & \rightsquigarrow & -u(t,-x) \\ -SCALING: & \forall \lambda > 0, & \frac{1}{\lambda}u_0(\frac{x}{\lambda}) & \rightsquigarrow & \frac{1}{\lambda}u(\frac{t}{\lambda^3},\frac{x}{\lambda}) \end{array}$$

*Remarque* 28. Une solution de $(mKdV)$ définie sur $\mathbb{R}$ peut aussi être transformée en une autre solution par translation en temps.

On donne ci-dessous les intégrales conservées par $(mKdV)$. La proposition suivante est issue de [12] et [13].

**Proposition 29.** *Soit $s \geq 1/4$. Soit $u_0 \in H^s$ et $u \in C([-T,T],H^s(\mathbb{R}))$ la solution de $(mKdV)$. Alors, pour tout $t \in [-T,T]$,*

$$\begin{array}{c} I_1(u(t)) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx = I_1(u_0) \\ I_2(u(t)) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)^2dx = I_2(u_0) \\ I_3(u(t)) := \frac{1}{2}\int(\frac{\partial u}{\partial x})^2dx - \int \frac{u(t,x)^4}{4}dx = I_3(u_0) \end{array}$$

### 3.3 Existence globale

En utilisant les lois de conservation, on peut établir l'existence globale. Ce théorème est issu de [13].

**Théorème 30.** *Soit $s \geq 1$. Le théorème sur l'existence locale s'étend à tout intervalle $[-T,T]$. De plus, $u \in L^\infty(\mathbb{R},H^{\lceil s\rceil}(\mathbb{R}))$.*

## Deuxième partie

# Stabilité des solitons

On s'intéresse ici aux solutions de $(NLS)$ de la forme $u(t,x) = Q(x)e^{iEt}$ où $E > 0$ et $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$. On voit alors que $Q$ vérifie :

$$(GS)\ \ \Delta Q - EQ + Q|Q|^{p-1} = 0$$

où $(GS)$ vient de « ground state », c'est-à-dire l'état fondamental. On s'intéressera surtout aux solutions positives, radiales, régulières et suffisament décroissantes de $(GS)$.

On rappelle que $2 < p+1 < 2^*$.

# 4 État fondamental

**Proposition 31.** *Il existe une solution positive $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de $(GS)$ qui n'est pas identiquement nulle.*

*Remarque* 32. On donnera plusieurs preuves de cette proposition ci-dessous.

**Proposition 33.** *Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ une solution positive non identiquement nulle de $(GS)$. Alors, $Q$ est strictement positive, régulière, exponentiellement décroissante. Son gradient aussi est exponentiellement décroissant.*

*Démonstration.* On obtient la régularité par un argument de régularité elliptique, la stricte positivité par un principe du maximum, cf l'appendice B de [3] pour plus de détails. □

**Proposition 34.** *Il existe une unique solution positive non identiquement nulle dans $H^1_r$ de $(GS)$.*

*Démonstration.* cf l'appendice B de [3] □

Le théorème suivant est un théorème de l'unicité de l'état fondamental, sans hypothèse « à symétrie radiale ».

**Théorème 35.** *Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ une solution positive de $(GS)$. Alors, il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que $Q(x - x_0)$ soit à symétrie radiale.*

*Démonstration.* cf l'appendice B de [3] ou [4]. □

## 4.1 Preuve de l'existence d'une solution positive de $(GS)$ par la fonctionnelle de Weinstein

Les arguments de cette preuve sont essentiellement issus de l'appendice B de [3].

Cette preuve fonctionne en dimension $d \geq 2$. Ceci n'est pas un problème car en dimension 1, on a affaire à une simple EDO qu'on peut traiter à la main.

**Définition 36.** Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ non nul, on définit la *fonctionnelle de Weinstein* par

$$W(u) = W_{d,p}(u) = \frac{\int |u|^{p+1}}{(\int |u|^2)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}} (\int \nabla u|^2)^{\frac{d(p-1)}{4}}}$$

*Remarque* 37. D'après l'*inégalité de Gagliardo-Nirenberg*, $W$ est **bornée**. On notera $W_{max}$ la meilleure constante dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg.

$$0 < W_{max} := \sup\{W(u),\, u \in H^1(\mathbb{R}^d), u \neq 0\} < +\infty$$

*Remarque* 38. L'ensemble des solutions $u$ de $(GS)$, ainsi que $W(u)$ sont invariants par les symétries suivantes :

- multiplication par une constante : $u(x) \rightsquigarrow \lambda u(x)$
- changement d'échelle : $u(x) \rightsquigarrow u_\lambda(x) := \lambda^{-\frac{2}{p-1}} u(\frac{x}{\lambda})$
- translation : $u(x) \rightsquigarrow u(x - x_0)$
- rotation de phase : $u(x) \rightsquigarrow u(x)e^{i\gamma}$
- conjugaison : $u(x) \rightsquigarrow \overline{u(x)}$

*Remarque* 39. Par multiplication par une constante et changement d'échelle, on peut transformer une solution de $\Delta Q + \alpha |Q|^{p-1} Q = \beta Q$ en une solution de $\Delta Q + |Q|^{p-1} Q = Q$. En particulier, $(GS)$ se ramène toujours à $(GS)$ avec $E = 1$.

On n'a pas encore prouvé que $W_{max}$ est atteint, mais on peut quand même établir dès à présent quelques propriétés sur le maximiseur dans le cas où il existe.

**Lemme 40.** ***(Weinstein)*** *Soit $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nul tel que $W(Q) = W_{max}$. Alors $\Delta Q + \alpha |Q|^{p-1} Q = \beta Q$ avec $\alpha$ et $\beta$ qui dépendent de $p, d, \|Q\|_{L^2}, \|\nabla Q\|_{L^2}$.*

*Démonstration.* La preuve se fait en écrivant que la différentielle de $W$ en $Q$ est nulle. □

Comme corollaire du lemme 4, on voit que l'on peut se ramener aux maximiseurs positifs.

**Corollaire 41.** *Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ non nul, $W(|u|) \geq W(u)$.*

On va maintenant prouver qu'il existe un maximiseur. Comme on a vu, on peut en déduire l'existence d'un maximiseur positif, et donc l'existence d'une solution de $(GS)$ positive non identiquement nulle.

La preuve est une adaptation de la preuve présentée dans l'appendice B de [3] utilisant le lemme de concentration-compacité, ce qui semble la rendre plus naturelle.

**Proposition 42.** *Il existe $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ non identiquement nul tel que $W(Q) = W_{max}$.*

*Démonstration.* Soit $(Q_n) \subseteq H^1(\mathbb{R}^d)$ une suite de fonctions non identiquement nulles telles que

$$W(Q_n) \to W_{max}$$

Par invariance par changement d'échelle et multiplication par une constante, on se ramène à $Q_n$ tels que $\int |Q_n|^2 = 1$, $\int |\nabla Q_n|^2 = 1$. Dans ce cas, l'hypothèse sur $(Q_n)$ est $\int |Q_n|^{p+1} \to W_{max}$.

La suite $(Q_n)$ vérifie alors les hypothèses du lemme de concentration-compacité. Quitte à passer à une sous-suite, on a trois alternatives qu'on va étudier.

**Compacité à translation près**

On a $(y_n) \subseteq \mathbb{R}^d$ telle que

$$\forall 2 \leq q < 2^*, \ \int |Q_n(x - y_n) - \widetilde{Q}(x)|^q dx \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$$

En particulier,

$$\int |Q_n(x-y_n) - \widetilde{Q}(x)|^2 dx \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

$$\int |Q_n(x-y_n) - \widetilde{Q}(x)|^{p+1} dx \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

En particulier, $\int |\widetilde{Q}(x)|^{p+1}dx = W_{max}$.

On a que $(Q_n(\cdot - y_n))$ est une suite bornée de $H^1$. Donc, $Q_n(\cdot - y_n) \rightharpoonup Q$ dans $H^1$ pour un certain $Q \in H^1$. Donc, $Q_n(\cdot - y_n) \rightharpoonup Q$ dans $L^2$. Or, $Q_n(\cdot - y_n) \to Q$ dans $L^2$. Donc, $Q = \widetilde{Q}$.

Puis, $\int |Q|^{p+1} = W_{max}$, $\int |Q|^2 = 1$ et par semi-continuité inférieure de la norme par limite faible, $\int |\nabla Q|^2 \leq 1$. Donc, $W(Q) \geq W_{max}$, donc $W(Q) = W_{max}$. On a donc prouvé la proposition dans ce cas.

**Évanescence**

Ceci implique que $\int |Q_n|^{p+1} \to 0$. C'est impossible car $W_{max} > 0$. Contradiction.

**Dichotomie**

On reprend les notations de l'énoncé du lemme de concentration-compacité ici.

On en déduit : $\int |v_n|^2 \to \alpha$, $\int |w_n|^2 \to 1-\alpha$, $\limsup_{n\to+\infty}(\int |\nabla v_n|^2 + \int |\nabla w_n|^2) \leq 1$ et $\int |v_n|^{p+1} + \int |w_n|^{p+1} \to W_{max}$.

On a :

$$\int |v_n|^{p+1} = W(v_n)(\int |v_n|^2)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}(\int |\nabla v_n|^2)^{\frac{d(p-1)}{4}}$$

et

$$\int |w_n|^{p+1} = W(w_n)(\int |w_n|^2)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}(\int |\nabla w_n|^2)^{\frac{d(p-1)}{4}}$$

Quitte à passer à des sous-suites, on a les convergences suivantes : $W(v_n) \to W_v \leq W_{max}$, $W(w_n) \to W_w \leq W_{max}$, $(\int |v_n|^2)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}} \to \alpha^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}$, $(\int |w_n|^2)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}} \to (1-\alpha)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}$, $(\int |\nabla v_n|^2)^{\frac{d(p-1)}{4}} \to \beta^{\frac{d(p-1)}{4}}$ et $(\int |\nabla w_n|^2)^{\frac{d(p-1)}{4}} \to \gamma^{\frac{d(p-1)}{4}}$, où $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$ et $\beta + \gamma \leq 1$.

Ainsi, en passant $W(v_n) + W(w_n)$ à la limite,

$$W_{max} \leq W_{max}(\alpha^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}\beta^{\frac{d(p-1)}{4}} + (1-\alpha)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}(1-\beta)^{\frac{d(p-1)}{4}})$$

Donc,

$$1 \leq \alpha^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}\beta^{\frac{d(p-1)}{4}} + (1-\alpha)^{1-\frac{(d-2)(p-1)}{4}}(1-\beta)^{\frac{d(p-1)}{4}}$$

Enfin, on va noter $\kappa = 1 - \frac{(d-2)(p-1)}{4}$ et $\theta = \frac{d(p-1)}{4}$. On note que $\frac{\theta}{1-\kappa} = \frac{d}{d-2} > 1$ et que $0 < \kappa < 1$. On va montrer que $\alpha^\kappa \beta^\theta + (1-\alpha)^\kappa (1-\beta)^\theta < 1$, ce qui sera une contradiction. On peut déjà remarquer que c'est bien évidemment le cas si $\beta = 0$ ou si $\beta = 1$. On peut donc se ramener au cas $0 < \beta < 1$.

On étudie $\alpha^\kappa \beta^\theta + (1-\alpha)^\kappa (1-\beta)^\theta$ comme fonction de $\alpha$ sur $]0,1[$. En la dérivant, on remarque que son maximum est atteint en $\alpha = \frac{1}{1+(\frac{1-\beta}{\beta})^{\frac{\theta}{1-\kappa}}} \in ]0,1[$. On peut donc calculer le maximum, dont l'expression explicite, après simplifications, est

$$[\beta^{\frac{\theta}{1-\kappa}} + (1-\beta)^{\frac{\theta}{1-\kappa}}]^{1-\kappa} < 1$$

La dernière inégalité est une inégalité de convexité. □

## 4.2 Preuve de l'existence d'une solution positive de $(GS)$ par un argument d'optimisation

Il y a une autre méthode qui permet d'obtenir une solution positive radiale de $(GS)$. Elle est présentée dans [2]. On va en donner les grandes lignes ici.

Cette preuve est basée sur la compacité de $H^1_r$ dans $L^{p+1}$. On rappelle que celle-ci n'est vraie qu'en dimension $d \geq 2$. Ceci n'est pas dramatique car la dimension 1 se fait à la main.

**Proposition 43.** *Soit $d \geq 2$ et $1 < p < 2^* - 1$.*

*Pour tout $M > 0$, notons*

$$\mathcal{A}_M := \{u \in H^1_r, \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1} dx = M\}$$

*Alors le problème de minimisation*

$$(**) \quad I_M = \inf_{u \in \mathcal{A}_M} \|u\|^2_{H^1}$$

*admet une solution $u_M$ dans $\mathcal{A}_M$.*

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite de $\mathcal{A}_M$ minimisante : $\|u_n\|^2_{H^1} \longrightarrow I_M \geq 0$.

$(u_n)$ est une suite bornée de $H^1_r$, donc $(u_n)$ converge dans $L^{p+1}$, à extraction près.

Donc, il existe $u \in H^1_r$ tel que

$$\begin{array}{ll} u_n \to u & L^{p+1} \\ u_n \rightharpoonup u & H^1 \end{array}$$

Il reste à utiliser la semi-continuité inférieure de la norme par passage à la limite faible. □

**Lemme 44.** *Si $u \in \mathcal{A}_M$ est un minimiseur de $(**)$, alors $|u|$ aussi.*

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme 4. □

**Proposition 45.** *Soit $u \geq 0$ un minimiseur de $(**)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\Delta u - u = -\lambda u^p$$

*dans $H^{-1}$. En outre,*

$$\lambda = \frac{I_M}{M} > 0$$

*Démonstration.* On applique la théorie des multiplicateurs de Lagrange pour obtenir l'équation ci-dessus. Pour obtenir la valeur de $\lambda$, on multiplie l'équation par $u$ et on fait une intégration par parties. $\square$

Cette dernière proposition nous donne l'existence d'une solution positive radiale non identiquement nulle de $(GS)$, voir la sous-section précédente pour savoir que par changement d'échelle on obtient une solution de $(GS)$ pour tout $E > 0$.

Comme avant, on obtient la régularité de l'état fondamental par un argument de régularité elliptique. L'unicité et la décroissance de l'état fondamental à partir de cette méthode est traitée dans [7].

## 4.3 Preuve de l'existence d'une solution positive en dimension 1

Pour être complet, on va aussi donner la preuve à la main en dimension 1. On veut donner une solution positive, paire, non identiquement nulle, décroissante vers 0 de

$$Q'' - Q + Q|Q|^{p-1} = 0$$

On rappelle qu'il n'y a pas de restriction sur $p$ en dimension 1 : $1 < p < +\infty$.

Pour $a \geq 0$, il existe une unique solution maximale de l'EDO non linéaire :

$$\begin{cases} Q'' - Q + Q^p = 0 \\ Q(0) = a,\ Q'(0) = 0 \end{cases}$$

Le choix de ce problème de Cauchy est justifié par le fait qu'on cherche une solution positive et paire. Si $a = 0$, par Cauchy-Lipschitz, la solution est nulle. On écarte ce cas et suppose que $a > 0$.

En multipliant l'équation du problème de Cauchy par $Q'$ et en intégrant par parties, on obtient pour $Q$ solution :

$$\frac{Q'(x)^2}{2} - \frac{Q(x)^2}{2} + \frac{Q(x)^{p+1}}{p+1} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

Grâce à cette formule, on voit qu'une condition nécessaire pour qu'une solution tende vers 0 est $a = (\frac{p+1}{2})^{\frac{1}{p-1}}$. Donc, il existe au plus une solution (une valeur de $a$) qui soit globale, non triviale et qui tende vers 0 en $+\infty$. Considérons donc la solution maximale pour $a = (\frac{p+1}{2})^{\frac{1}{p-1}}$. On peut alors préciser la formule précédente :

$$\frac{Q'(x)^2}{2} - \frac{Q(x)^2}{2} + \frac{Q(x)^{p+1}}{p+1} = 0$$

On veut savoir si cette solution reste toujours positive. Grâce à cette formule, on voit que si $Q(x) = 0$, alors $Q'(x) = 0$ : c'est une contradiction avec $Q$ non identiquement nulle, par Cauchy-Lipschitz. On en déduit que $\forall x > 0$, $Q(x) > 0$, $Q'(x) < 0$. Par le lemme de sortie des compacts, la solution est bien globale.

Enfin, on peut même obtenir une expression explicite de $Q$ :

$$Q(x) = \left(\frac{p+1}{2\cosh^2((\frac{p-1}{2})x)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Ceci nous donne à la fois l'existence, l'unicité, la régularité, la décroissance vers 0...

Notons que, par régularité elliptique, une solution de cette EDO est régulière. On a donc aussi montré l'unicité d'une solution positive non nulle et paire au sens faible.

# 5 Solitons

## 5.1 Solitons pour $(NLS)$ focalisant

**Définition 46.** On appelle **soliton** ou **onde solitaire** ou **onde solitaire périodique** une solution de $(NLS)$ focalisant du type

$$u(t,x) = Q(x)e^{iEt}$$

avec $Q \in H^1(\mathbb{R}^d)$ solution positive radiale non identiquement nulle de $(GS)$ pour $E > 0$ correspondant.

*Remarque* 47. On peut sans perte de généralité se ramener à $E = 1$. C'est ce qu'on fera dans la plupart des énoncés par la suite.

**Fait 48.** *Si $u(t,x) = Q(x)e^{it}$ est un soliton solution de $(NLS)$ focalisant, alors $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d))$ par un argument de convergence dominée.*

### 5.1.1 Stabilité de l'onde solitaire ?

On ne fera l'étude de la stabilité de l'onde solitaire que dans le cas $L^2$-sous-critique. C'est uniquement dans ce cas qu'on démontrera la stabilité orbitale de l'onde solitaire dans le sens qu'on verra. On peut renvoyer à l'énoncé sur l'existence globale pour l'équation de Schrödinger pour se convaincre du fait que la restriction $L^2$-sous-critique est nécessaire pour espérer une quelconque stabilité de l'onde solitaire.

Commençons par remarquer que l'onde solitaire n'est pas stable au sens le plus strict. On va voir que l'énoncé

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta(\epsilon) > 0\, \forall u_0 \in H^1,\ \|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t>0} \|u(t,x) - Q(x)e^{it}\|_{H^1} < \epsilon$$

est faux.

Les symétries de l'équation induisent, en effet, des instabilités.

**Instabilité par scaling** Pour $\lambda > 0$, on pose l'état initial $(u_0)_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} Q(\lambda x)$, on obtient alors la solution $u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} Q(\lambda x) e^{i\lambda^2 t}$. On peut montrer que $\|(u_0)_\lambda - Q\|_{H^1} \to_{\lambda \to 1} 0$. Puis, pour $\lambda \neq 1$ et proche de 1, on peut choisir $n_\lambda \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ impair tel que $\Re(e^{in_\lambda \frac{\pi}{\lambda^2}}) \geq \frac{1}{2}$, on pose $t_\lambda = n_\lambda \frac{\pi}{\lambda^2}$. Puis, on montre que $\|u_\lambda(t_\lambda, x) - Q(x)e^{it_\lambda}\|_{H^1} \geq \frac{1}{2}\|Q\|_{L^2}$ pour tout $\lambda > 0$. Instabilité.

**Instabilité par transformation de Galilée** Pour $\beta \in \mathbb{R}^d$, on choisit l'état initial $(u_0)_\beta(x) = Q(x)e^{i\beta\cdot x}$, on obtient alors la solution $u_\beta(t,x) = Q(x - 2\beta t)e^{i\beta\cdot(x-\beta t)}e^{it}$. On peut montrer que $\|(u_0)_\beta - Q\|_{H^1} \to_{\beta\to 0} 0$. Toutefois, pour $\beta \neq 0$, $\|u_\beta(t,x) - Q(x)e^{it}\|_{H^1} \geq \|Q\|_{L^2}$ pour $t$ suffisament grand. Instabilité.

**Solution** On a quand même une notion de stablité autour du soliton, c'est la *stabilité orbitale*. C'est la stabilité modulo ces symétries, la stablité à l'orbite du soliton induite par ces symétries, qu'on peut voir pour chaque temps $t > 0$ donné, comme un déphasage et une translation.

**Définition 49.** Pour $(NLS)$, on définit l'*orbite* d'une fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{G}_\psi := \{\psi(\cdot + x_0)e^{i\gamma}, (x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^d \times [0, 2\pi[\}$$

*Remarque* 50. Nous on s'intéressera à l'orbite de l'*état fondamental* $\psi = Q$.

**Définition 51.** On définit la distance $\rho(u(t), \mathcal{G}_\psi)$ entre une solution $u(t)$ de $(NLS)$ à un instant $t$ et l'orbite $\mathcal{G}_\psi$ d'un état fondamental par

$$\rho(u(t), \mathcal{G}_\psi) := \inf_{(x_0,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times[0,2\pi[} \{\|u(\cdot + x_0, t)e^{i\gamma} - \psi\|_{H^1}\}$$

**Définition 52.** On dit qu'un état fondamental $\psi$ est *orbitalement stable* lorsque

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta(\epsilon) > 0\, \forall u_0 \in H^1\ \rho(u_0, \mathcal{G}_\psi) < \delta(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t>0} \rho(u(t), \mathcal{G}_\psi) < \epsilon$$

Ainsi, on va démontrer la stabilité orbitale de l'onde solitaire dans le cas $L^2$-sous-critique. Plus précisément, l'énoncé suivant :

**Théorème 53.** *Supposons que $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$ (cas $L^2$-sous-critique). Alors l'état fondamental $Q$, défini dans la section précédente, est orbitalement stable.*

## 5.2 Solitons pour $(mKdV)$

La référence pour cette sous-section est [12].

**Définition 54.** On appelle *soliton* ou *onde solitaire* une solution de $(mKdV)$ du type

$$u(t,x) = \psi(x - ct)$$

où $c > 0$ est la vitesse de propagation, avec $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ non identiquement nulle, positive, paire, régulière, décroissante exponentiellement vers 0 en $+\infty$ ainsi que ses dérivées.

*Remarque* 55. Quitte à faire une homothétie en temps, on peut se ramener à $c = 1$. On peut donc se limiter à l'étude de ce cas là.

*Remarque* 56. En injectant le soliton dans l'équation $(mKdV)$, on trouve que $\psi$ doit vérifier l'équation

$$-\psi' + \psi''' + 3\psi^2\psi' = 0$$

En tenant compte de la régularité et de la décroissance de $\psi$ ainsi que de ses dérivées, on peut intégrer cette EDO pour obtenir une autre EDO vérifiée par $\psi$ :

$$-\psi + \psi'' + \psi^3 = 0$$

On retrouve alors l'équation $(GS)$ de l'état fondamental en dimension 1.

Donc,

$$\psi(x) = Q(x) = (\frac{2}{\cosh^2(x)})^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\cosh(x)}$$

Comme pour le cas de $(NLS)$, il est raisonnable de s'intéresser ici à la stabilité orbitale du soliton, en occurence à translation près.

**Définition 57.** Pour $(mKdV)$, on définit l'*orbite* d'une fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathcal{G}_\psi := \{\psi(\cdot + x_0), x_0 \in \mathbb{R}\}$$

**Définition 58.** On définit la distance $\rho(u(t), \mathcal{G}_\psi)$ entre une solution $u(t)$ de $(mKdV)$ à un instant $t$ et l'orbite $\mathcal{G}_\psi$ d'un état fondamental par

$$\rho(u(t), \mathcal{G}_\psi) := \inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \{\|u(\cdot + x_0, t) - \psi\|_{H^1}\}$$

**Théorème 59.** *L'état fondamental $Q$ est* orbitalement stable *dans le cadre $H^2$, c'est-à-dire*

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall u_0 \in H^2 \rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta(\epsilon) \implies \sup_{t>0} \rho(u(t), \mathcal{G}_Q) < \epsilon$$

*Remarque* 60. La preuve de ce théorème est similaire à celle qu'on donne dans la section 7 pour $(NLS)$. On utilisera la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{E}[w] := I_2(w) + I_3(w)$. Il faut suivre le même schéma de preuve avec cette fonctionnelle, mais en plus simple car ici on est sur $\mathbb{R}$ et non sur $\mathbb{C}$.

# 6 Preuve de la stabilité des solitons pour $(NLS)$ focalisant par minimisation de l'énergie à masse fixée

Cette preuve repose sur une caractérisation variationnelle du soliton utilisant les invariants de masse et d'énergie. Elle est issue de [2].

## 6.1 Caractérisation variationnelle du soliton $L^2$-sous-critique

**Théorème 61.** *Soit $s_c < 0$ et $Q$ l'état fondamental défini dans la section 3. Soit $M > 0$. Alors :*

*(i) Le problème de minimisation*

$$I(M) = \inf\{E(u),\, u \in H^1,\, \|u\|_{L^2}^2 = M\}$$

*où E(u) est la fonctionnelle d'énergie, est atteint sur la famille*

$$Q_{\lambda(M)}(x - x_0)e^{i\gamma_0},\ x_0 \in \mathbb{R}^d,\ \gamma_0 \in \mathbb{R}$$

*où*

$$Q_{\lambda(M)}(x) := (\lambda(M))^{\frac{2}{p-1}} Q(\lambda(M)x) \text{ avec } \lambda(M) := \left(\frac{M}{\|Q\|_{L^2}^2}\right)^{-\frac{1}{2s_c}}$$

*(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $H^1$ telle que*

$$\|u_n\|_{L^2}^2 \to M \text{ et } E(u_n) \to I(M)$$

*alors il existe $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathbb{R}$ et une extraction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :*

$$u_{\phi(n)}(\cdot + x_{\phi(n)})e^{i\gamma} \to Q_{\lambda(M)} \text{ dans } H^1$$

Grâce à ce théorème, on peut montrer la stabilité orbitale du soliton.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde. Soit $\epsilon > 0$ et une suite $(u_n)$ de solutions de $(NLS)$ telle que

$$\|u_n(0, x) - Q\|_{H^1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

et supposons qu'il existe $(t_n)$ avec $t_n \geq 0$ vérifiant

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d,\, \forall \gamma \in \mathbb{R},\, \|u_n(t_n, \cdot + x_0)e^{i\gamma} - Q\|_{H^1} > \epsilon$$

Par continuité de la fonctionnelle d'énergie sur $H^1$,

$$E(u_n(0, x)) \to E(Q) = E(Q_{\lambda(M)}) = I(M)$$

où $M$ est tel que $\lambda(M) = 1$, i.e. $M = \|Q\|_{L^2}^2$.

Par continuité de la masse sur $H^1$,

$$\|u_n(0, \cdot)\|_{L^2}^2 \to \|Q\|_{L^2}^2 = M$$

On pose $w_n(x) = u_n(t_n, x)$. Par conservation de la masse et de l'énergie,

$$E(w_n) \to I(M),\ \|w_n\|_{L^2}^2 \to M$$

et donc, par le théorème, on peut trouver $x_{\phi(n)}$ et $\gamma$ tels que

$$w_{\phi(n)}(\cdot + x_{\phi(n)})e^{i\gamma} \to Q_{\lambda(M)} = Q \text{ dans } H^1$$

Contradiction. □

## 6.2 Preuve de la caractérisation variationnelle

On travaille toujours dans l'hypothèse $L^2$-sous-critique ($s_c < 0$) dans cette sous-section. On peut commencer par calculer $I(M)$ à une constante multiplicative près.

**Lemme 62.** *$\forall M > 0$, $I(M) = M^{\frac{1-s_c}{|s_c|}} I(1)$ avec $-\infty < I(1) < 0$*

*Démonstration.* On peut commencer par montrer que $I(M) > -\infty$. Par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg,

$$\|u\|_{L^{p+1}} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma}\|u\|_{L^2}^{1-\sigma} \ \ avec \ \ -\sigma + \frac{d}{2} = \frac{d}{p+1}$$

Pour $u \in H^1$ vérifiant $\|u\|_{L^2}^2 = M$, on a donc

$$E(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - C\|\nabla u\|_{L^2}^{\frac{d(p-1)}{2}} M^{\frac{(p+1)(1-\sigma)}{2}}$$

Or, $L^2$-sous-critique est équivalent à $\frac{d(p-1)}{2} < 2$. Ceci implique $I(M) > -\infty$.

Ensuite, on montre que $I(M) < 0$. On prend $u \in H^1$ tel que $\|u\|_{L^2}^2 = M$. Pour $\lambda > 0$, on pose $u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2}} u(\lambda x)$. Alors, $\|u_\lambda\| = \|u\|$ et $E(u_\lambda) < 0$ pour $\lambda > 0$ assez petit.

Pour montrer l'expression de $I(M)$ à une constante près, on utilise le changement d'échelle :

$$u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda x)$$

Alors

$$\|u_\lambda\|_{L^2}^2 = \lambda^{-2s_c}\|u\|_{L^2}^2$$

et

$$E(u_\lambda) = \lambda^{2(1-s_c)} E(u)$$

Donc,

$$\forall M > 0, \forall \lambda > 0, I(\lambda^{-2s_c} M) = \lambda^{2(1-s_c)} I(M)$$

Ce qui implique la relation voulue. □

Supposons que l'infimum est atteint. Voici quelques éléments de classification de l'ensemble des minimiseurs.

**Lemme 63.** *Soit $u$ un minimiseur pour $I$. Alors :*

*(i) La fonction $|u|$ est un minimiseur et*

$$\int |\nabla |u||^2 dx = \int |\nabla u|^2 dx$$

*(ii) Si $u \geq 0$ alors il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\Delta u + u^p = \mu u$$

*(iii) Le multiplicateur de Lagrange $\mu$ est indépendant du minimiseur et*

$$\mu = \mu(M) > 0$$

*Démonstration.* (i) est une conséquence du lemme 4.

(ii) s'obtient par la théorie des multiplicateurs de Lagrange.

(iii) On a obtenu pour un $u \geq 0$ minimiseur $\Delta u + u^p = \mu u$. On veut montrer que $\mu$ ne dépend pas du minimiseur choisi. L'idée, ici, est d'appliquer les identités de Pohozaev.

$$(\Delta u + u^p)(\frac{d}{2}u + x \cdot \nabla u) = \mu u(\frac{d}{2}u + x \cdot \nabla u)$$

donc,

$$-\int |\nabla u|^2 + (\frac{d}{2} - \frac{d}{p+1})\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} = 0$$

Puis, on multiplie l'identité par $u$ :

$$\Delta u \cdot u + u^{p+1} = \mu u^2$$

En faisant une intégration par parties :

$$-\int |\nabla u|^2 + \int u^{p+1} = \mu \int u^2 = \mu M$$

Les deux identités obtenues nous permettent d'écrire l'identité suivante :

$$\mu M = (1 - \frac{d}{2}\frac{p-1}{p+1}) \int u^{p+1} dx$$

On en déduit :

$$I(M) = E(u) = \frac{1}{p+1} \frac{\frac{d(p-1)}{4} - 1}{1 - \frac{d}{2}\frac{p-1}{p+1}} \mu M$$

Cette dernière relation permet de voir que $\mu$ ne dépend que de $M$. Et, en utilisant que $I(M) < 0$, on trouve que $\mu > 0$. □

Il s'agit maintenant de trouver les minimiseurs parmi les solutions positives de $\Delta u + u^p = \mu u$, $\mu > 0$. Le théorème suivant est le résultat voulu de classification des minimiseurs, sous hypothèse de l'existence d'un minimiseur.

**Proposition 64.** *Soit $u \in H^1$ un minimiseur de $I(M)$. Alors, il existe $(\gamma_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tel que $u(x) = Q_{\lambda(M)}(x - x_0)e^{i\gamma_0}$.*

*Démonstration.* Soit $u$ minimiseur, alors $v = |u|$ aussi. $v$ est non identiquement nul car $I(M) < 0$. Donc, $v$ est une solution non triviale de

$$\Delta v + v^p = \mu v,\ v \in H^1,\ v \geq 0$$
$$avec \mu = \mu(M) > 0$$

On prend $\lambda = \sqrt{\mu}$, $\mu = \lambda^2$, et on fait le bon changement d'échelle dans l'espoir de quasiment se ramener à $Q$.

$$w = \frac{1}{\lambda^{\frac{2}{p-1}}} v(\frac{x}{\lambda})$$

Maintenant, on vérifie facilement que $w$ satisfait $(GS)$, et $w$ est positive non identiquement nulle. Il suffit d'appliquer le théorème sur l'unicité de l'état fondamental pour $w$. On obtient $w = Q(\cdot - x_0)$.

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 4 (en utilisant que $u$ est le minimiseur) pour trouver que $u$ et $v$ sont proportionnelles. □

Il reste encore à prouver l'existence du minimiseur et de décrire les suites minimisantes. On va faire la fin de la preuve du théorème ci-dessous.

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ une suite minimisante pour $I(M)$ : $\|u_n\|_{L^2}^2 = M$ et $E(u_n) \to I(M)$. D'après l'expression de l'énergie, on en déduit que $(u_n)$ est bornée dans $H^1$. On peut alors appliquer le lemme de concentration-compacité. On montre que la seule alternative possible est la compacité à translation près. On montre de la même manière le deuxième point du théorème. □

# 7 Preuve de la stabilité des solitons pour $(NLS)$ focalisant par introduction d'une fonctionnelle de Lyapunov

Dans cette section, on prouve le même théorème que dans la section précédente. Cette preuve se fait en introduisant une fonctionnelle d'énergie de Lyapunov sur $H^1(\mathbb{R}^d)$, à partir des invariants de masse et d'énergie de $(NLS)$. Cette preuve est issue de [8], ainsi que des articles auxquels l'article [8] fait référence.

On va poser $\sigma := \frac{p-1}{2}$. On travaille dans un cadre $L^2$-sous-critique, c'est-à-dire dans un cadre $\sigma < \frac{2}{d}$.

**Définition 65.** Soit $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. On définit

$$\mathcal{E}[\phi] := H[\phi] + E[\phi]$$

On rappelle que pour $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, la distance à l'orbite de l'état fondamental est définie par $\rho(\phi, \mathcal{G}_Q) := \inf_{(x_0,\gamma)\in\mathbb{R}^d\times[0,2\pi[}\{\|\phi(\cdot + x_0)e^{i\gamma} - Q\|_{H^1}\}$.

**Lemme 66.** *Si $u(t)$ est une solution de $(NLS)$, alors $A : t \longmapsto \rho(u(t), \mathcal{G}_Q)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.*

*Démonstration.* Pour $t_1, t_2 \geq 0$, on rappelle que la distance (en occurence la norme $H^1$ sur $\mathbb{R}^d$) à une partie (en occurence, $\mathcal{G}_Q$) est 1-lipschitzienne,

$$\begin{aligned}|A(t_1) - A(t_2)| &= |\rho(u(t_1), \mathcal{G}_Q) - \rho(u(t_2), \mathcal{G}_Q)| \\ &\leq \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^1}\end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité car $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1)$. □

**Définition 67.** Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et une solution $u$, on pose $(x_0(t), \gamma(t)) \in \mathbb{R}^d \times [-\pi, \pi[$ tels que $\rho(u(t), \mathcal{G}_Q) = \|u(t, \cdot + x_0(t), t)e^{i\gamma(t)} - Q\|_{H^1}$, s'ils existent (dans le cas où il y a le choix, on fait un choix arbitraire).

**Lemme 68.** *Si* $A(t)^2 < \|u(t,\cdot)\|_{H^1}^2 + \|Q\|_{H^1}^2$*, alors on dispose de* $x_0(t), \gamma(t)$*.*

**Lemme 69.** *On a, dans tous les cas,* $A(t)^2 \leq \|u(t,\cdot)\|_{H^1}^2 + \|Q\|_{H^1}^2$*.*

*Démonstration.* On remarque que $\lim_{|x_0|\to+\infty} \|\phi(\cdot + x_0)e^{i\gamma} - Q\|_{H^1}^2 = \|\phi\|_{H^1}^2 + \|Q\|_{H^1}^2 := M^2$. Par conséquent, s'il existe $(x_0, \gamma)$ tels que $\|\phi(\cdot+x_0)e^{i\gamma} - Q\|_{H^1}^2 < M^2$, alors l'infimum définissant la distance $\rho$ est atteint en des valeurs finies.

De plus, la fonction $(t, x_0, \gamma) \longmapsto u(t, \cdot + x_0)e^{i\gamma} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ est continue. □

## 7.1 Preuve du résultat principal

Passons à la preuve du résultat principal.

Soit $\epsilon > 0$. Le but est de montrer que $\exists\delta(\epsilon) > 0$, $\forall u_0 \in H^1$, $\rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t>0} \rho(u(t), \mathcal{G}_Q) < \epsilon$. On pose $\epsilon_1 = \min(\epsilon, \frac{\|Q\|_{H^1}}{2})$. On commence par poser $\delta_1 = \epsilon_1$. On prend $u_0 \in H^1$ tel que $\rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta_1$. Quitte à faire une translation et un déphasage pour $u_0$, on peut affirmer, sans perte de généralité, que $\|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta_1$. La solution $u \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d))$, donc on dispose d'un temps $T_0 > 0$ tel que $\forall t \in [0, T_0]$, $\|u(t) - Q\|_{H^1} < \delta_1$. En particulier, pour tout $t \in [0, T_0]$, $x_0(t), \gamma(t)$ existent.

On pose $T_1 \in ]0, +\infty]$ maximal tel que $\forall t \in [0, T_1[$, $x_0(t), \gamma(t)$ existent.

**Définition 70.** Pour $t \in [0, T_1[$, on définit $w(t)$ par $u(t, \cdot + x_0(t))e^{i\gamma(t)} = Q + w(t)$. On décomposera $w$ en partie réelle et partie imaginaire de la façon suivante : $w = f + ig$.

*Remarque* 71. D'après ce qu'on a déjà vu, $w \in C([0, T_1[, H^1(\mathbb{R}^d))$.

*Remarque* 72. Pour $t \in [0, T_1[$, $\|w(t)\|_{H^1} = \rho(u(t), \mathcal{G}_Q)$

**Fait 73.** *On peut faire le calcul suivant en regardant la variation de la fonctionnelle de Lyapunov qu'on a défini au début autour du soliton :*

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E} &:= \mathcal{E}[u_0] - \mathcal{E}[Q] \\
&= \mathcal{E}[u(t,\cdot)] - \mathcal{E}[Q] \quad \text{(lois de conservation)} \\
&= \mathcal{E}[u(t, \cdot + x_0)e^{i\gamma}] - \mathcal{E}[Q] \\
&= \mathcal{E}[Q + w] - \mathcal{E}[Q] \\
&\geq (L_+ f, f) + (L_- g, g) - C_1\|w\|_{H^1}^{2+\theta} - C_2\|w\|_{H^1}^6 \quad \text{avec } \theta = \frac{4}{d} > 0
\end{aligned}$$

*où* $L_+ := -\Delta + 1 - (2\sigma+1)Q^{2\sigma}$*,* $L_- := -\Delta + 1 - Q^{2\sigma}$ *et* $(\cdot,\cdot)$ *est le crochet de dualité* $H^{-1} - H^1$*.*

*La dernière inégalité s'obtient en faisant un développement limité.*

## 7.2 Lemme central

On fait, dans cette sous-section, l'hypothèse suivante : $\forall t \in [0, T_1[$, $\int |u(t,x)|^2 dx = \int Q^2(x)dx$

**Théorème 74.** *Si* $\forall t \in [0, T_1[$, $\int |u(t,x)|^2 dx = \int Q^2(x)dx$, *alors pour* $t \in [0, T_1[$, $(L_+ f, f) + (L_- g, g) \geq C_3 \|w\|_{H^1}^2 - C_4 \|w\|_{H^1}^3 - C_5 \|w\|_{H^1}^4$.

Cette sous-section sera consacrée à la preuve de ce théorème.

**Lemme 75.** *Pour* $t \in [0, T_1[$,

$$\int Q^{2\sigma}(x) \frac{\partial Q(x)}{dx_j} f(t,x) dx = 0, \quad j = 1, ..., d$$
$$\int Q^{2\sigma+1}(x) g(t,x) dx = 0.$$

*Démonstration.* Il suffit de dériver $\|u(t, \cdot + x_0)e^{i\gamma} - Q\|_{H^1}^2$ par rapport aux composantes de $x_0$ et à $\gamma$, en $x_0(t), \gamma(t)$. □

**Fait 76.** *La théorie sur le principe du maximum et la théorie spectrale pour les opérateurs elliptiques auto-adjoints sur domaines bornés s'étend au moins partiellement aux domaines non bornés. En particulier, le principe du maximum fort pour opérateurs elliptiques est vérifié et se montre à partir de l'énoncé pour les domaines bornés. On montre de la même manière que pour le cas des domaines bornés, que si le plus petit élément du spectre d'un opérateur elliptique est une valeur propre, alors cette valeur propre est simple et la fonction propre associée, dite* fonction propre principale, *est strictement positive dans tout le domaine de définition de l'opérateur. On renvoie à [10] pour la théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints non bornés.*

**Lemme 77.** $L_-$ *est un opérateur auto-adjoint positif sur* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *défini sur la partie dense* $H^2(\mathbb{R}^d)$.

*Démonstration.* On vérifie que $L_-$ est une perturbation compacte de l'opérateur $-\Delta + 1$, donc leurs spectres essentiels sont les mêmes, plus précisément c'est $[1, +\infty[$.

Or, $L_- Q = 0$ et $Q > 0$, donc 0 est une valeur propre de $L_-$. Supposons par l'absurde que $\alpha < 0$ est le plus petit élément du spectre de $L_-$. On sait que $\alpha > -\infty$ car $L_-$ est elliptique. On sait que $\alpha$ est une valeur propre de $L_-$ car $\alpha < 1$. D'après le fait ci-dessus, on dispose d'une fonction propre principale $R$ telle que $R > 0$ et $L_- R = \alpha R$. On a que $\int QR = 0$ car c'est des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Or, $\int QR > 0$. Contradiction.

Donc, le plus petit élément du spectre de $L_-$ est 0, donc $L_-$ est auto-adjoint positif. □

**Lemme 78.** $\inf_{\substack{\|g\|_{L^2} = 1 \\ \int Q^{2\sigma+1} g = 0}} (L_- g, g) > 0.$

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que $\inf_{\substack{\|g\|_{L^2} = 1 \\ \int Q^{2\sigma+1} g = 0}} (L_- g, g) = 0.$ On dispose alors d'une suite $(g_n) \subseteq H^2(\mathbb{R}^d)$ où $\|g_n\| = 1$, $g_n \perp Q^{2\sigma+1}$ telle que $(L_- g_n, g_n) \to_{n \to +\infty} 0$.

Notons que pour $g \in H^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|g\| = 1$, $g \perp Q^{2\sigma+1}$, on a $(L_- g, g) > 0$ (car $(L_- g, g) = 0$ implique que $g$ est proportionnel à $Q$, ce qui est impossible si $g$ est orthogonal à $Q^{2\sigma+1}$).

Soit $\eta > 0$. On dispose alors de $N$ tel que $\forall n \geq N$ $0 < (L_- g_n, g_n) \leq \eta$. Donc, $0 < \int |\nabla g_n|^2 dx + \int |g_n|^2 dx \leq \int Q^{2\sigma} g_n^2 dx + \eta \leq \sup Q^{2\sigma} + \eta$.

On en déduit que $(\|g_n\|_{H^1})$ est bornée. Quitte à passer à une sous-suite (à partir de maintenant, on ne garde que la sous-suite en question), $g_n \rightharpoonup g_*$ dans $H^1$. En particulier, $(R^{2\sigma+1}, g_n) \to (R^{2\sigma+1}, g_*)$, donc $g_* \perp Q^{2\sigma+1}$.

On va montrer que $(Q^{2\sigma} g_n, g_n) \to (Q^{2\sigma} g_*, g_*)$. Soit $\epsilon > 0$. On dispose de $M > 0$ tel que pour $|x| > M$, $Q^{2\sigma}(x) < \epsilon$. Notons $B_M := \{x \in \mathbb{R}^d, |x| < M\}$, c'est un ouvert borné. On sait que sur $B_M$, $(g_n)$ est bornée dans $H^1$ et converge faiblement vers $g_*$. D'après le théorème de Rellich-Kondrachov, $g_n \to g_*$ fortement dans $L^2(B_M)$. Puis, $\|Q^\sigma(g_n - g_*)\|_{L^2(B_M)} \leq (\sup Q^\sigma)\|g_n - g_*\|_{L^2(B_M)}$. Donc, $Q^\sigma g_n \to Q^\sigma g_*$ dans $L^2(B_M)$. En particulier, on a la convergence des normes : $\int_{B_M} Q^{2\sigma} g_n^2 \to \int_{B_M} Q^{2\sigma} g_*^2$. Donc, il existe $N_1$ tel que $\forall n \geq N_1$ $|\int_{B_M} Q^{2\sigma} g_n^2 - \int_{B_M} Q^{2\sigma} g_*^2| < \epsilon$. Enfin, pour $n \geq N_1$,

$$\begin{aligned}
|(Q^{2\sigma} g_n, g_n) - (Q^{2\sigma} g_*, g_*)| &\leq |\int_{B_M} Q^{2\sigma} g_n^2 - \int_{B_M} Q^{2\sigma} g_*^2| + |\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_M} Q^{2\sigma} g_n^2| + |\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_M} Q^{2\sigma} g_*^2| \\
&\leq \epsilon + \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} g_n^2 + \epsilon \int_{\mathbb{R}^d} g_*^2 \\
&\leq 3\epsilon
\end{aligned}$$

On a que $1 \leq (Q^{2\sigma} g_n, g_n) + \eta$. Si on choisit $\eta \leq \frac{1}{2}$, on voit que $(Q^{2\sigma} g_n, g_n)$ est uniformément minorée. Donc, $(Q^{2\sigma} g_*, g_*) > 0$, donc $g_*$ est non identiquement nul.

On rappelle que la convergence faible implique

$$\|g_*\|_{H^1} \leq \liminf \|g_n\|_{H^1}$$

Donc, $(L_- g_*, g_*) = 0$ et donc $g_*$ est proportionnel à $Q$, non identiquement nul et orthogonal à $Q^{2\sigma+1}$. Contradiction. □

*Remarque* 79. On en déduit qu'il existe $C' > 0$ tel que $(L_- g, g) \geq C' \|g\|_{L^2}^2$ pour $g \perp Q^{2\sigma+1}$.

En écrivant l'expression de $L_-$, on obtient alors pour $g \perp Q^{2\sigma+1}$

$$\int |\nabla g|^2 dx + \int |g|^2 dx - \int Q^{2\sigma} |g|^2 dx \geq C' \int |g|^2 dx$$

**Lemme 80.** *On dispose d'une constante $C'' > 0$ telle que pour $g \perp Q^{2\sigma+1}$, $(L_- g, g) \geq C'' \|g\|_{H^1}^2$.*

*Démonstration.* Soit $1 > A > 0$. Alors

$$\begin{aligned}\int |\nabla g|^2 dx + \int |g|^2 dx - \int Q^{2\sigma}|g|^2 dx &= (1-A)(\int |\nabla g|^2 dx + \int |g|^2 dx - \int Q^{2\sigma}|g|^2 dx)\\ &+ A(\int |\nabla g|^2 dx + \int |g|^2 dx - \int Q^{2\sigma}|g|^2 dx)\\ &\geq (C' - C'A + A)\int |g|^2 dx + A\int |\nabla g|^2 dx - A\int Q^{2\sigma}|g|^2 dx\\ &\geq (C' - C'A + A - A\sup Q^{2\sigma})\int |g|^2 dx + A\int |\nabla g|^2 dx\\ &\geq C''\|g\|^2_{H^1}\end{aligned}$$

pour une certaine constante $C'' > 0$, en choisissant $A > 0$ suffisament petit. $\square$

On rappelle qu'on travaille toujours avec l'hypothèse $\sigma < \frac{2}{d}$.

**Lemme 81.** $\inf_{(f,Q)=0}(L_+f, f) = 0$

*Démonstration.* On remarque que $L_+\nabla Q = 0$, et bien sûr $\nabla Q \neq 0$. De plus, $(\nabla Q, Q) = 0$. Donc, $\inf_{\substack{(f,Q)=0\\ f\neq 0}} (L_+f, f) \leq 0$.

On rappelle que la fonctionnelle de Weinstein $W(u)$, définie plus haut, atteint un extrémum local en $Q$. On peut donc écrire que la différentielle de $J = \frac{1}{W}$ autour de $Q$ est nulle.

Plus précisément, $\varepsilon \longmapsto J(Q + \varepsilon\eta)$ atteint un minimum local en 0, où $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On peut donc écrire la condition locale du second ordre.

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}|_{\varepsilon=0} J(Q + \varepsilon\eta) \geq 0$$

Pour continuer, on donne le résultat du calcul de cette dérivée seconde en 0 :

$$\begin{aligned}J(Q)[(&\frac{\sigma d}{\int |\nabla Q|^2}\int \nabla Q\nabla\eta + \frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}\int Q\eta - \frac{2\sigma+2}{\int Q^{2\sigma+2}}\int \eta Q^{2\sigma+1})^2\\ &+\frac{\sigma d}{\int |\nabla Q|^2}\int |\nabla\eta|^2 - 2\sigma d\frac{(\int \nabla Q\cdot\nabla\eta)^2}{(\int \nabla Q^2)^2} + \frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}\int \eta^2\\ &-\frac{2(2+\sigma(2-d))}{(\int Q^2)^2}(\int R\eta)^2 - \frac{(2\sigma+2)(2\sigma+1)}{\int Q^{2\sigma+2}}\int \eta^2 Q^{2\sigma}\\ &+(2\sigma+2)^2\frac{(\int \eta Q^{2\sigma+1})^2}{(\int Q^{2\sigma+2})^2}]\end{aligned}$$

On va écrire cette expression sous la forme $(T\eta, \eta) \geq 0$. On va écrire l'expression de $W(Q)T\eta$ :

$$
\begin{aligned}
(-\frac{\sigma d}{\int(\nabla Q)^2}(\Delta Q,\eta)+\frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}(Q,\eta)-\frac{2\sigma+2}{\int Q^{2\sigma+2}}(Q^{2\sigma+1},\eta))\\
\times(-\frac{\sigma d}{\int(\nabla Q)^2}\Delta Q+\frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}Q-\frac{2\sigma+2}{\int Q^{2\sigma+2}}Q^{2\sigma+1})\\
-\frac{\sigma d}{\int|\nabla Q|^2}\Delta\eta-\frac{2\sigma d}{(\int \nabla Q^2)^2}(\Delta Q,\eta)\Delta Q+\frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}\eta\\
-\frac{2(2+\sigma(2-d))}{(\int Q^2)^2}(Q,\eta)Q-\frac{(2\sigma+2)(2\sigma+1)}{\int Q^{2\sigma+2}}Q^{2\sigma}\eta+\frac{(2\sigma+2)^2}{(\int Q^{2\sigma+2})^2}(Q^{2\sigma+1},\eta)Q^{2\sigma+1}
\end{aligned}
$$

On voit qu'on obtient une combinaison linéaire (dont les coefficients dépendent de $\eta$) de $\Delta Q$, $Q$, $Q^{2\sigma+1}$, $\Delta\eta$, $\eta$ et $Q^{2\sigma}\eta$. L'équation vérifiée par $Q$ permet d'éliminer la fonction $Q^{2\sigma+1}$ de la combinaison linéaire et de l'expression des coefficients.

On va montrer que les coefficients devant $-\Delta\eta$, $\eta$ et $-(2\sigma+1)Q^{2\sigma}\eta$ sont les mêmes. Il s'agit de $\frac{\sigma d}{\int|\nabla Q|^2}$, $\frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}$ et $\frac{2\sigma+2}{\int Q^{2\sigma+2}}$.

On rappelle que depuis la relation $\Delta Q - Q + Q^{2\sigma+1}=0$, en la multipliant par $Q$ et en faisant une intégration par parties, on obtient

$$\int Q^{2\sigma+2}=\int\nabla Q^2+\int Q^2$$

En utilisant les identités de Pohozaev, on obtient :

$$
\begin{aligned}
-\int\nabla Q^2&=\int\Delta Q(\frac{d}{2}Q+x\cdot\nabla Q)dx\\
&=\int Q(\frac{d}{2}Q+x\cdot\nabla Q)dx-\int Q^{2\sigma+1}(\frac{d}{2}Q+x\cdot\nabla Q)dx\\
&=-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{\sigma+1})\int Q^{2\sigma+2}
\end{aligned}
$$

Donc, on peut relier les trois quantités $\int Q^{2\sigma+2}$, $\int\nabla Q^2$ et $\int Q^2$. On a : $\int\nabla Q^2=\frac{d}{2}\frac{\sigma}{\sigma+1}\int Q^{2\sigma+2}$ et $\int Q^2=\int Q^{2\sigma+2}-\int\nabla Q^2=[1-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{\sigma+1})]\int Q^{2\sigma+2}=\frac{1+\sigma(1-\frac{d}{2})}{\sigma+1}\int Q^{2\sigma+2}$.

On en déduit

$$\frac{\sigma d}{\int|\nabla Q|^2}=\frac{2+\sigma(2-d)}{\int Q^2}=\frac{2\sigma+2}{\int Q^{2\sigma+2}}=\theta>0$$

Donc,

$$W(Q)T\eta=\theta L_+\eta+a_1(\Delta Q,\eta)\Delta Q+a_2(\Delta Q,\eta)Q+a_3(Q,\eta)\Delta Q+a_4(Q,\eta)Q$$

où $a_1,a_2,a_3,a_4$ sont des constantes indépendantes de $\eta$. On va étudier plus précisément la constante $a_1$. On donne le résultat du calcul :

$$a_1=-2\theta\frac{1}{\int\nabla Q^2}+\theta^2=\theta(\theta-\frac{2}{\int\nabla Q^2})=\theta\frac{\sigma d-2}{\int|\nabla Q|^2}$$

On rappelle que $\sigma d < 2$, donc $-a_1 > 0$.

On en déduit que si $\eta \perp Q$, $\theta(L_+\eta, \eta) = W(Q)(T\eta, \eta) - a_1(\Delta Q, \eta)^2 \geq 0$. □

**Proposition 82.** *On a*

$$\ker(L_+) = Vect\{\frac{\partial R}{\partial x_j}, j = 1, ...d\}$$

*Démonstration.* On peut voir [12] pour une preuve en dimensions 1 et 3.

On peut voir [16] pour une preuve en toutes dimensions (c'est la même preuve, mais complétée). □

On rappelle l'hypothèse qu'on fait dans cette sous-section : $\forall t \in [0, T_1[$, $\int |u(t,x)|^2 dx = \int Q^2(x) dx$.

On fait un produit scalaire hermitien en espace, à temps fixé. En utilisant le fait que $Q$ est à valeurs réelles, $(Q, w) = (Q, f) = (f, Q) = (w, Q)$. Donc,

$$\begin{aligned}(w, Q) &= \frac{(Q + w, Q + w) - (Q, Q) - (w, w)}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(w, w)\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse.

On obtient ainsi l'énoncé suivant :

**Lemme 83.** $(f, Q) = -\frac{1}{2}[(f, f) + (g, g)]$

**Proposition 84.** *Soit $\sigma < \frac{2}{d}$. Il existe des constantes $D, D', D'', D''' > 0$ telles que si $w = f + ig$ vérifie pour tout $t \in [0, T_1[$ :*

$$\int Q^{2\sigma}(x) \frac{\partial Q(x)}{\partial x_j} f(t, x) dx = 0$$

*pour $j = 1, ..., d$ et*

$$(f, Q) = -\frac{1}{2}[(f, f) + (g, g)]$$

*Alors :*

$$(L_+ f, f) \geq D\|f\|^2 - D'\|\nabla f\| \|w\|^2 - D''\|w\|^3 - D'''\|w\|^4$$

*Remarque* 85. Quand on ne précise pas, la norme $\| \cdot \|$ désigne la norme $L^2$.

*Démonstration.* On va décomposer $f$ en sa projetée orthogonale sur $Vect(Q)$ et sa projetée orthogonale sur $Q^\perp$ :

$$f = f_{/\!/} + f_\perp$$

avec $f_{/\!/} = (f, Q)\frac{Q}{\|Q\|^2} = -\frac{1}{2}\frac{[(f,f)+(g,g)]Q}{\|Q\|^2}$ et $f_\perp = f - f_{/\!/} = f + \frac{1}{2}[(f, f) + (g, g)]\frac{Q}{\|Q\|^2}$.

Alors, $(L_+f, f) = (L_+f_{/\!/}, f_{/\!/}) + 2(L_+f_{/\!/}, f_\perp) + (L_+f_\perp, f_\perp)$ (on rappelle que $f$ est à valeurs réelles)

Si $f$ n'est pas proportionnelle à $Q$, $\frac{(L_+f_\perp, f_\perp)}{(f_\perp, f_\perp)} \geq 0$.

On étudie

$$\inf_{\substack{\int Q^{2\sigma}\nabla Q h = 0 \\ (h,Q)=0 \\ \|h\|=1}} (L_+h, h) = \alpha \geq 0$$

(ici, on travaille avec des fonctions $h$ à valeurs réelles)

On veut montrer que $\alpha > 0$. On va supposer par l'absurde que $\alpha = 0$ et faire un raisonnement similaire à celui qu'on a déjà fait.

Soit $(h_n)$ une suite minimisante : $(L_+h_n, h_n) \to 0$.

Soit $\eta > 0$. On dispose de $N$ tel que pour $n \geq N$,

$$0 \leq \int |\nabla h_n|^2 + \int |h_n|^2 - (2\sigma+1)\int Q^{2\sigma}|h_n|^2 \leq \eta$$

autrement dit

$$0 < \int |\nabla h_n|^2 + \int |h_n|^2 \leq (2\sigma+1)\int Q^{2\sigma}|h_n|^2 + \eta$$

Donc, $(\|h_n\|_{H^1})$ est uniformément bornée, disons par $M$. Par passage à une sous-suite, $h_n \rightharpoonup h_*$ dans $H^1$. Par convergence faible, $h_* \perp Q$ et $\int Q^{2\sigma}\nabla Q h_* = 0$. Par semi-continuité inférieure de la norme pour la limite faible, on a aussi

$$\|h_*\|_{L^2} \leq \|h_*\|_{H^1} \leq \liminf \|h_n\|_{H^1} \leq M$$

On peut montrer par le même argument que pour $L_-$ ci-dessus que $(Q^{2\sigma}h_n, h_n) \to (Q^{2\sigma}h_*, h_*)$ et que $(Q^{2\sigma}h_*, h_*)$ est non nul, et donc $h_*$ est non identiquement nul.

On a :

$$\begin{aligned}\|h_*\|^2 = \int |h_*|^2 dx &= \lim_{n\to+\infty}\int h_n h_* dx \\ &\leq (\liminf_{n\to+\infty}\|h_n\|)\|h_*\| \leq \|h_*\|\end{aligned}$$

Donc, $\|h_*\| \leq 1$ (et $\|h_*\| > 0$).

Pour $\zeta \in L^2$, $\|\zeta\| = 1$, en utilisant $h_n \rightharpoonup h_*$ à une sous-suite près (on se restreint à la sous-suite en question),

$$(\zeta, \nabla h_*) = \lim(\zeta, \nabla h_n) \leq \liminf \|\nabla h_n\|$$

On en déduit : $\|\nabla h_*\| \leq \liminf \|\nabla h_n\|$.

On en déduit que

$$(L_+h_*, h_*) \leq \liminf (L_+h_n, h_n) = 0$$

Donc, $(L_+h_*, h_*) = 0$ (on sait que $L_+$ est positif sur l'orthogonal de $Q$), il en est de même pour $r = \frac{h_*}{\|h_*\|}$, qui lui en plus vérifie toutes les conditions de l'infimum étudié. Ainsi, $r$ minimise $L_+$ sous les trois contraintes considérées.

En différentiant la fonctionnelle et la contrainte, en utilisant la théorie des multiplicateurs de Lagrange, on en déduit qu'il existe $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$(L_+ - \lambda)r = \beta Q + \gamma \cdot Q^{2\sigma} \nabla Q$$

Donc,

$$((L_+ - \lambda)r, r) = 0$$

Donc,

$$(L_+r, r) = \lambda = 0$$

comme on l'a déjà vu. Donc,

$$L_+r = \beta Q + \gamma \cdot Q^{2\sigma} \nabla Q$$

On veut arriver à voir que cette dernière équation n'a pas de solutions $(r, \beta, \gamma)$ non triviales.

Par symétrie de $L_+$, $(L_+r, \nabla Q) = 0$. Par intégration par parties, on trouve $(Q, \nabla Q) = 0$. Donc,

$$(\gamma \cdot Q^{2\sigma} \nabla Q, \nabla Q) = 0$$

En développant l'expression, on en déduit que $\gamma \equiv 0$. D'où

$$L_+r = \beta Q$$

En sachant qu'on connaît le noyau de $L_+$, on en déduit qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$r = -\frac{1}{2}\beta(\frac{Q}{\sigma} + x \cdot \nabla Q) + \theta \cdot \nabla Q$$

Notons que $(\nabla Q, Q) = 0$, $(x \cdot \nabla Q, Q) = -\frac{d}{2}(Q, Q)$. Donc,

$$0 = (r, Q) = -\frac{1}{2}\beta(\frac{1}{\sigma} - \frac{d}{2})(Q, Q)$$

Or, $\sigma < \frac{2}{d}$. Donc, $\beta = 0$. Donc,

$$r = \theta \cdot \nabla Q$$

Mais, $(Q^{2\sigma}\frac{\partial Q}{\partial x_j}, \frac{\partial Q}{\partial x_j}) > 0$ et $(Q^{2\sigma}\frac{\partial Q}{\partial x_j}, \frac{\partial Q}{\partial x_i}) = 0$ pour $i \neq j$. Comme $(Q^{2\sigma}\nabla Q, r) = 0$, on en déduit que $\theta \equiv 0$, donc $r = 0$. Contradiction.

Donc, $\alpha > 0$.

Notons que $\int Q^{2\sigma} \nabla Q \cdot Q = 0$, donc si $\int Q^{2\sigma} \nabla Q f = 0$, alors $\int Q^{2\sigma} \nabla Q f_\perp = 0$.

Donc,

$$\begin{aligned}
(L_+f_\perp, f_\perp) &\geq \alpha(f_\perp, f_\perp) \\
&= \alpha[(f, f) - (f_{/\!/}, f_{/\!/})] \\
&= \alpha[(f, f) - \frac{1}{4}[(f, f) + (g, g)]^2 \frac{1}{\|Q\|^2}]
\end{aligned}$$

$$(L_+ f_{/\!/}, f_{/\!/}) = \frac{1}{4}\frac{[(f,f)+(g,g)]^2}{\|Q\|^4}(L_+ Q, Q)$$

$$(L_+ f_\perp, f_{/\!/}) = -\frac{1}{2}\frac{(f,f)+(g,g)}{\|Q\|^2}(L_+ f_\perp, Q)$$

On considère pour la preuve de l'inégalité désirée toutes les quantités qui ne dépendent que de $Q$ et de $L_+$ comme des constantes du problème.

*Étude plus détaillée de* $(L_+ f_\perp, Q)$ *:* On va chercher à majorer cette quantité.

$$(L_+ f_\perp, Q) = \int \nabla f_\perp \nabla Q - (2\sigma+1)\int Q^{2\sigma+1} f_\perp$$

On a :

$$\int Q^{2\sigma+1} f_\perp = -\int \Delta Q f_\perp = \int \nabla Q \nabla f_\perp$$

Donc :

$$(L_+ f_\perp, Q) = -2\sigma \int \nabla Q \nabla f_\perp$$

Cela revient donc à minorer $\int \nabla Q \nabla f_\perp$. On va le faire de la manière suivante :

$$\int \nabla Q \nabla f_\perp = \int \nabla Q \nabla f - (f, Q)\int |\nabla Q|^2$$

On a :

$$\begin{aligned} \left|\int \nabla Q \nabla f_\perp\right| &\leq \left|\int \nabla Q \nabla f\right| + |(f,Q)|\int |\nabla Q|^2 \\ &\leq \|\nabla Q\|\|\nabla f\| + \|f\|\|Q\|\|\nabla Q\|^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\int \nabla Q \nabla f_\perp \geq -\|\nabla Q\|\|\nabla f\| - \|f\|\|Q\|\|\nabla Q\|^2$$

Finalement, on peut trouver des constantes $D, D', D'', D''' > 0$ telles que :

$$(L_+ f, f) \geq D\|f\|^2 - D'\|\nabla f\|\|w\|^2 - D''\|w\|^3 - D'''\|w\|^4$$

□

En faisant un raisonnement analogue à celui vu ci-dessus pour $L_-$, on obtient

**Corollaire 86.** *Avec les mêmes hypothèses que la proposition précédente, il existe* $D, D', D'', D''' > 0$ *tels que*

$$(L_+ f, f) \geq D\|f\|_{H^1}^2 - D'\|\nabla f\|\|w\|^2 - D''\|w\|^3 - D'''\|w\|^4$$

On en déduit qu'on a démontré le lemme central.

## 7.3 Fin de la preuve du résultat principal sur $[0, T_1[$ sous l'hypothèse du lemme central

On continue ici à faire l'hypothèse suivante : $\forall t \in [0, T_1[,\ \int |u(t,x)|^2 dx = \int Q^2(x)dx$.

En prenant en compte le début de la preuve et le fait que le lemme central est démontré, on obtient :

$$\Delta\mathcal{E} \geq c\|w\|_{H^1}^2(1 - a\|w\|_{H^1}^\theta - b\|w\|_{H^1}^4)$$

où $a, b, c, \theta > 0$. Donc,

$$\Delta\mathcal{E} \geq c\rho(u(t), \mathcal{G}_Q)^2(1 - a\rho(u(t), \mathcal{G}_Q)^\theta - b\rho(u(t), \mathcal{G}_Q)^4) = g(\rho(u(t), \mathcal{G}_Q))$$

La fonction $g$ est telle que $g(0) = 0$ et $g(t) > 0$ pour $0 < t \ll 1$. Soit $s > 0$ tel que $g(t) > 0$ pour $0 < t \leq s$.

On pose $\epsilon' = \min(\epsilon_1, s) \leq \epsilon$. Par continuité de $\mathcal{E}$, il existe $\epsilon' > \delta(\epsilon') > 0$ tel que si $\rho(u(0), \mathcal{G}_Q) < \delta(\epsilon')$, alors $\Delta\mathcal{E}(0) < g(\epsilon')$. Or, $\Delta\mathcal{E}$ est constante en temps, et $\rho(u(t), \mathcal{G}_Q)$ est continue en temps. On prend donc $\delta_2 = \min(\delta_1, \delta(\epsilon'))$. On prend alors $u_0$, $\|u_0\| = \|Q\|$ telle que $\rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta_2$, alors pour $t \in [0, T_1[$, on a $\rho(u(t), \mathcal{G}_Q) < \epsilon' \leq \epsilon$.

## 7.4 $T_1 = +\infty$ sous hypothèse du lemme central

Supposons par l'absurde que $T_1 < +\infty$. On vient de démontrer que $\forall t \in [0, T_1[$, $\rho(u(t), \mathcal{G}_Q) < \epsilon' \leq \epsilon_1 \leq \frac{\|Q\|_{H^1}}{2}$. Donc, $\rho(u(T_1), \mathcal{G}_Q) < \|Q\|_{H^1}$. Donc, il existe $\tau > 0$ tel que pour $t \in [0, T_1 + \tau]$, $\rho(u(t), \mathcal{G}_Q) < \|Q\|_{H^1}$. En particulier, pour $t \in [0, T_1 + \tau]$, on a $A(t)^2 < \|u(t, \cdot)\|_{H^1}^2 + \|Q\|_{H^1}^2$ (cf. le début de la section). On en déduit que pour $t \in [0, T_1 + \tau]$, on peut définir $x_0(t), \gamma(t)$. Contradiction avec la définition de $T_1$.

## 7.5 Fin de la preuve du résultat principal sur $[0, +\infty[$ sans hypothèse du lemme central

On rappelle qu'une solution de $(NLS)$ préserve la norme $L^2$.

On va utiliser une des symétries canoniques pour $(NLS)$ qui est le *scaling*.

**Définition 87.** Soit $\lambda > 0$ et $f \in C(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d))$. On pose

$$f_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{1}{\sigma}} f(\lambda x, \lambda^2 t)$$

*Remarque* 88. Pour $t \geq 0$, $\|f_\lambda(\cdot, t)\| = \lambda^{\frac{1}{\sigma} - \frac{d}{2}} \|f(\cdot, \lambda^2 t)\|$

*Remarque* 89. Pour $t \geq 0$, $\|f_\lambda(\cdot, t)\|_{H^1} \leq \max(1, \lambda)\lambda^{\frac{1}{\sigma} - \frac{d}{2}} \|f(\cdot, \lambda^2 t)\|_{H^1}$.

*Remarque* 90. Pour $t \geq 0$, $D : \lambda \longmapsto f_\lambda(\cdot, t) \in H^1$ est continue.

**Exemple 91.** Pour le soliton déterminé par l'état fondamental $Q$,

$$Q_\lambda(x, t) = \lambda^{\frac{1}{\sigma}} Q(\lambda x) \exp\{i\lambda^2 t\}$$

*Remarque* 92. $C : \lambda \in ]0, +\infty[ \longmapsto \|Q_\lambda\|$ est strictement croissante, continue, tend vers 0 en 0, tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $C(1) = \|Q\|$. On notera $B : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction réciproque, elle est continue. En particulier, $B(\|Q\|) = 1$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme ci-dessus, on lui associe $\epsilon'$. Comme ci-dessus, on lui associe $\delta_2$. Soit $1 > \kappa > 0$ tel que $2^{\frac{1}{\sigma}+2-\frac{d}{2}}\kappa < 1$. Par continuité de $D$ pour $Q$, on a qu'il existe $0 < \beta < \frac{1}{2}$ tel que si $|\lambda - 1| < \beta$, alors $\|Q_\lambda(0) - Q\|_{H^1} < \kappa \min(\epsilon', \delta_2)$. Par continuité de la fonction $B$, il existe $\vartheta > 0$ tel que si $|y - \|Q\|| < \vartheta$, alors $|B(y) - 1| < \beta$. On pose $\delta_3 = \min(\kappa\delta_2, \vartheta)$.

Soit $u_0$ tel que $\rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta_3$. On dispose alors de $T_1$ tel que pour $t \in [0, T_1[$, $x_0(t), \gamma(t)$ existent. Quitte à faire une translation et un déphasage pour $u_0$ (ce qui ne change rien pour la conclusion qu'on cherche à démontrer), on peut écrire $\rho(u_0, \mathcal{G}_Q) = \|u_0 - Q\|_{H^1} < \delta_3$. Notons que $|\|u_0\| - \|Q\|| \leq \|u_0 - Q\| \leq \|u_0 - Q\|_{H^1} = \rho(u_0, \mathcal{G}_Q) < \delta_3 \leq \vartheta$. On pose $\lambda = B(\|u_0\|)$. On sait alors que $|\lambda - 1| < \beta < \frac{1}{2}$. On sait alors que $\|Q_\lambda(0) - Q\|_{H^1} < \kappa \min(\epsilon', \delta_2)$. Alors, comme $\|u_0\| = \|Q_\lambda\|$, on a $\|u_{0,\frac{1}{\lambda}}\| = \|Q\|$. On a alors que

$$\begin{aligned}
\rho(u_{0,\frac{1}{\lambda}}, \mathcal{G}_Q) &\leq \|u_{0,\frac{1}{\lambda}} - Q\|_{H^1} \leq \max(1, \frac{1}{\lambda}) \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\sigma}-\frac{d}{2}}} \|u_0 - Q_\lambda(0)\|_{H^1} \\
&\leq 2^{\frac{1}{\sigma}+1-\frac{d}{2}} (\|u_0 - Q\|_{H^1} + \|Q - Q_\lambda(0)\|_{H^1}) \\
&\leq 2^{\frac{1}{\sigma}+1-\frac{d}{2}} \kappa\delta_2 < \delta_2
\end{aligned}$$

$u_{\frac{1}{\lambda}}$ satisfait l'hypothèse du lemme central. On en déduit d'après la sous-section ci-dessus que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\rho(u_{\frac{1}{\lambda}}(t), \mathcal{G}_Q) < \epsilon'$. On sait aussi que pour $t \in [0, +\infty[$, on dispose de $x_{0,\frac{1}{\lambda}}(t), \gamma_{\frac{1}{\lambda}}(t)$.

Soit $t \in [0, +\infty[$. Quitte à faire une translation et un déphasage pour $u_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t)$ de $x_{0,\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t), \gamma_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t)$, on peut écrire que $\rho(u_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t), \mathcal{G}_Q) = \|u_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t) - Qe^{i\lambda^2 t}\|_{H^1}$. Donc, $\|u(t) - Q_\lambda(t)\|_{H^1} \leq \max(1, \lambda)\lambda^{\frac{1}{\sigma}-\frac{d}{2}} \|u_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t) - Qe^{i\lambda^2 t}\|_{H^1} \leq 2^{\frac{1}{\sigma}+1-\frac{d}{2}} \|u_{\frac{1}{\lambda}}(\lambda^2 t) - Qe^{i\lambda^2 t}\|_{H^1}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\rho(u(t), \mathcal{G}_Q) &\leq \|u(t) - Qe^{i\lambda^2 t}\|_{H^1} \\
&\leq \|u(t) - Q_\lambda(t)\|_{H^1} + \|Q_\lambda(0) - Q\|_{H^1} \\
&< (2^{\frac{1}{\sigma}+1-\frac{d}{2}} + \kappa)\epsilon'
\end{aligned}$$

Ceci démontre le résultat principal sans hypothèse du lemme central.

## Troisième partie

# Stabilité des breathers

Les résultats et démonstrations de cette partie sont issus des références [14] et [15].

Dans cette partie, on ne s'intéressera qu'à l'équation $(mKdV)$. On a déjà vu que cette équation admet des solitons et que ceux-ci sont orbitalement stables.

On va étudier, dans cette partie, la stabilité orbitale d'une autre catégorie d'objets.

**Définition 93.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, un *breather* de $(mKdV)$ est donné par

$$\begin{aligned} B_{\alpha,\beta}(t,x) &:= 2\sqrt{2}\partial_x[\arctan(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha(x+\delta t))}{\cosh(\beta(x+\gamma t))})] \\ &= \frac{2\sqrt{2}\beta}{\cosh(\beta(x+\gamma t))}[\frac{\cos(\alpha(x+\delta t)) - \frac{\beta}{\alpha}\sin(\alpha(x+\delta t))\tanh(\beta(x+\gamma t))}{1+(\frac{\beta}{\alpha})^2\frac{\sin^2(\alpha(x+\delta t))}{\cosh^2(\beta(x+\gamma t))}}] \end{aligned}$$

où $\delta := \alpha^2 - 3\beta^2$ et $\gamma := 3\alpha^2 - \beta^2$

*Remarque* 94. Un breather est une solution localisée en espace et périodique en temps dans le sens suivant : on dispose de périodes $T > 0$ et $L = L(T) \in \mathbb{R}$ telles que

$$B_{\alpha,\beta}(t+T,x) = B_{\alpha,\beta}(t,x-L)$$

Remarquons que l'infimum des périodes $T > 0$ telles que la propriété de périodicité ci-dessus est vérifiée est strictement positif. Dans le cas contraire, on aurait affaire non pas à un breather mais à un soliton. Remarquons que la propriété de périodicité ci-dessus peut être utilisée pour définir la notion de breather, mais dans ce cas il est possible de retrouver la définition qu'on a donnée à translation en espace et en temps près. C'est pourquoi, on va considérer la famille des breathers à 4 paramètres $\alpha, \beta, x_1, x_2$ :

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2) := B_{\alpha,\beta}(t-t_0, x-x_0) = 2\sqrt{2}\partial_x[\arctan(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cosh(\beta y_2)})]$$

avec $y_1 := x + \delta t + x_1$, $y_2 := x + \gamma t + x_2$, $t_0 := \frac{x_1 - x_2}{2(\alpha^2+\beta^2)}$ et $x_0 := \frac{\delta x_2 - \gamma x_1}{2(\alpha^2+\beta^2)}$. Notons qu'avec cette formule, on a pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1 + \frac{k\pi}{\alpha}, x_2) = (-1)^k B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1,x_2)$$

On trouve que $L(T) = -\gamma T$. C'est pourquoi on dit que $-\gamma = \frac{L}{T}$ est la *vitesse* de propagation du breather.

Il est possible d'exprimer la période minimale en temps du breather en fonction de ses paramètres :

$$T = \frac{2\pi}{\alpha(\gamma-\delta)} = \frac{\pi}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}$$

On a toujours $\gamma \neq \delta$.

*Remarque* 95. On vérifie les relations $B_{-\alpha,\beta} = B_{\alpha,\beta}$ et $B_{\alpha,-\beta} = -B_{\alpha,\beta}$. Ceci nous permet de nous restreindre, sans perte de généralité, aux paramètres $\alpha, \beta > 0$.

$\alpha, \beta$ sont en quelque sorte des *paramètres d'échelle*. On a, pour $c > 0$, la relation de scaling suivante :

$$c^{1/2}B_{\alpha,\beta}(c^{3/2}t, c^{1/2}x) = B_{c^{1/2}\alpha, c^{1/2}\beta}(t,x)$$

L'objet de cette partie sera de démontrer le résultat suivant sur la stabilité orbitale $H^2$ des breathers de $(mKdV)$ :

**Théorème 96.** *Soit $\alpha, \beta > 0$. On dispose de paramètres $\eta_0, A_0$ tels que la proposition suivante est vérifiée. Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\eta \in ]0, \eta_0[$ tel que*

$$\|u_0 - B_{\alpha,\beta}(0; 0, 0)\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq \eta$$

*Alors il existe des fonctions $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ telles que la solution $u(t)$ du problème de Cauchy pour $(mKdV)$ avec donnée initiale $u_0$ vérifie*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t) - B_{\alpha,\beta}(t; x_1(t), x_2(t))\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq A_0 \eta$$

# 8 Preuve de la stabilité orbitale des breathers

## 8.1 Calcul de la masse et de l'énergie d'un breather

*Remarque* 97. On peut commencer par donner le résultat du calcul de la masse et de l'énergie pour $Q$, état fondamental pour les solitons, dont on a l'expression explicite

$$I_2[Q] = 2, \quad I_3[Q] = -\frac{2}{3}$$

**Lemme 98.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot; x_1, x_2)$ un breather de $(mKdV)$ pour $\alpha, \beta > 0$. Alors*

$$I_2[B](t) = 2\beta I_2[Q] = 4\beta$$

*Remarque* 99. Pour prouver ce lemme, on passe par le calcul de l'intégrale suivante (et on obtient le résultat en faisant tendre $x$ vers $+\infty$. On en aura besoin dans les énoncés qui vont suivre.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\alpha,\beta}(t,x) &:= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} B_{\alpha,\beta}^2(t,s;x_1,x_2)ds \\ &= \frac{2\beta[\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sin(2\alpha y_1)-\beta^2\cos(2\alpha y_1)+\alpha^2(\sinh(2\beta y_2)+\cosh(2\beta y_2))]}{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\cosh(2\beta y_2)-\beta^2\cos(2\alpha y_1)}\end{aligned}$$

avec $y_1$ et $y_2$ définis ci-dessus.

On en déduit les conditions de Weinstein généralisées.

**Corollaire 100.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot, \cdot; x_1, x_2)$ un breather de (mKdV). Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, soit $\Lambda_\alpha B := \partial_\alpha B$ et $\Lambda_\beta B := \partial_\beta B$.*

*Alors les deux fonctions $\Lambda_\alpha B$ et $\Lambda_\beta B$ sont dans l'espace de Schwartz pour la variable d'espace, et vérifient les identités*

$$\partial_\alpha I_2[B] = \int B \Lambda_\alpha B = 0$$

*et*

$$\partial_\beta I_2[B] = \int B \Lambda_\beta B = 4 > 0$$

*pour tout temps.*

*Démonstration.* Conséquence des définitons et calcul. □

**Lemme 101.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot;x_1,x_2)$ un breather de (mKdV), avec $\alpha,\beta > 0$. Alors, on a*

*(1) $B$=$\partial_x \widetilde{B}$, avec $\widetilde{B} = \widetilde{B}_{\alpha,\beta}$ qui est donné par la fonction $L^\infty$ et régulière*

$$\widetilde{B}(t,x) := 2\sqrt{2}\arctan(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\sin(\alpha y_1)}{\cos(\beta y_2)})$$

*(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a que $\partial_t \widetilde{B}$ est bien définie et est dans la classe de Schwartz, et vérifie*

$$\partial^2_{xx}B + \partial_t \widetilde{B} + B^3 = 0$$

*(3) Finalement, avec $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ définie ci-dessus, on a*

$$(\partial_x B)^2 + \frac{1}{2}B^4 + 2B\partial_t \widetilde{B} - 2\partial_t(\mathcal{M}_{\alpha,\beta}) = 0$$

*Démonstration.* (1) est une conséquence immédiate de la définition.

(2) s'obtient en intégrant $(mKdV)$ de $-\infty$ à $x$.

(3) s'obtient en multipliant l'équation de (2) par $\partial_x B$ et en intégrant par parties. □

**Lemme 102.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot;x_1,x_2)$ un breather de (mKdV), avec $\alpha,\beta > 0$. Alors*

$$I_3[B] = 2\beta(3\alpha^2 - \beta^2)|I_3[Q]| = 2\beta\gamma|I_3[Q]|$$

*Remarque* 103. Le signe de l'énergie est donné par le signe de la vitesse $\gamma$.

*Démonstration. Etape 1* On commence par prouver la relation suivante

$$I_3[B] = \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})_t(t,x)dx$$

On part pour cela de l'équation $\partial^2_{xx}B + \partial_t \widetilde{B} + B^3 = 0$, on la multiplie par $B$ et on l'intègre par parties

$$\int B_x^2 = \int B\widetilde{B}_t + \int B^4$$

En intégrant la relation $(\partial_x B)^2 + \frac{1}{2}B^4 + 2B\partial_t \widetilde{B} - 2\partial_t(\mathcal{M}_{\alpha,\beta}) = 0$,

$$\int B_x^2 + \frac{1}{2}\int B^4 + 2\int B\widetilde{B}_t - 2\int(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})_t = 0$$

On en déduit

$$\int B^4 = \frac{4}{3}\int(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})_t - \frac{2}{3}\int B\widetilde{B}_t$$

et donc

$$\int B_x^2 = \frac{1}{3}\int B\widetilde{B}_t + \frac{4}{3}\int(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})_t$$

En utilisant l'expression de $I_3$ et ces deux égalités, on obtient la relation désirée.

*Etape 2* On termine la preuve par calcul explicite. $\square$

**Corollaire 104.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot;x_1,x_2)$ un breather de (mKdV), avec $\alpha,\beta > 0$. Alors*

$$\partial_\alpha I_3[B] = 12\alpha\beta|I_3[Q]| = 8\alpha\beta > 0$$

*et*

$$\partial_\beta I_3[B] = 6(\alpha^2-\beta^2)|I_3[Q]| = 4(\alpha^2-\beta^2)$$

*Remarque* 105. On trouve par calcul direct à partir de l'expression de l'énergie $I_3$, les expressions suivantes

$$\partial_\alpha I_3[B] = -\int \Lambda_\alpha B[B_{xx}+B^3]dx$$

et

$$\partial_\beta I_3[B] = -\int \Lambda_\beta B[B_{xx}+B^3]dx$$

## 8.2 Equation elliptique stationnaire vérifiée par un breather

**Lemme 106.** *Soit $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot;x_1,x_2)$ un breather de (mKdV), avec $\alpha,\beta > 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\partial_{xt}^2 B + 2(\partial_t \mathcal{M}_{\alpha,\beta})B = 2(\beta^2-\alpha^2)\partial_t\widetilde{B} + (\alpha^2+\beta^2)^2 B$$

*Démonstration.* Il suffit d'en faire la vérification directe par calcul, en utilisant les expressions explicites données ou obtenues plus haut des fonctions qui apparaissent dans l'équation. $\square$

*Remarque* 107. On va désormais utiliser les notations $B = B_{\alpha,\beta}(\cdot,\cdot;x_1,x_2)$ et $\mathcal{M}_t = \partial_t(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})$, sans que cela ne soit ambigu.

**Proposition 108.** *Soit $B$ un breather de $(mKdV)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B$ satisfait l'équation non linéaire stationnaire*

$$G[B] := B_{(4x)} - 2(\beta^2-\alpha^2)(B_{xx}+B^3) + (\alpha^2+\beta^2)^2 B + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 = 0$$

*Remarque* 109. Cette équation est indépendante des paramètres de temps et de translation en espace.

*Démonstration.* En utilisant $\partial_{xx}^2 B + \partial_t \widetilde{B} + B^3 = 0$ et $(\partial_x B)^2 + \frac{1}{2}B^4 + 2B\partial_t \widetilde{B} - 2\partial_t(\mathcal{M}_{\alpha,\beta}) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
B_{(4x)} - 2(\beta^2-\alpha^2)(B_{xx}+B^3) + (\alpha^2+\beta^2)^2 B + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 \\
= -(\partial_t \widetilde{B} + B^3)_{xx} + 2(\beta^2-\alpha^2)\partial_t \widetilde{B} + (\alpha^2+\beta^2)^2 B + 5BB_x^2 + 5B^2B_{xx} + \frac{3}{2}B^5 \\
= -B_{tx} - BB_x^2 + 2B^2B_{xx} + 2(\beta^2-\alpha^2)\partial_t \widetilde{B} + (\alpha^2+\beta^2)^2 B + \frac{3}{2}B^5 \\
= -B_{tx} + B(\frac{1}{2}B^4 + 2B\partial_t \widetilde{B} - 2\partial_t(\mathcal{M}_{\alpha,\beta})) - 2B^2(\partial_t \widetilde{B} + B^3) \\
+2(\beta^2-\alpha^2)\partial_t \widetilde{B} + (\alpha^2+\beta^2)^2 B + \frac{3}{2}B^5 \\
= -[B_{tx} + 2\mathcal{M}_t B] + 2(\beta^2-\alpha^2)\partial_t \widetilde{B} + (\alpha^2+\beta^2)^2 B = 0
\end{aligned}$$

On a utilisé le lemme précédent pour la dernière ligne. □

**Corollaire 110.** *Soit $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un certain intervalle. On considère le breather modifié*

$$B^0_{\alpha,\beta}(t,x) := B_{\alpha,\beta}(t,x;x_1(t),x_2(t))$$

*Alors, pour tout $t$ dans l'intervalle considéré, on a que $B^0_{\alpha,\beta}$ vérifie aussi l'équation elliptique stationnaire de la proposition précédente.*

*Démonstration.* car l'équation est indépendante des paramètres de temps et de translation en espace. □

*Remarque* 111. Donc, cette équation peut être vérifiée par une fonction qui n'est pas exactement une solution de $(mKdV)$.

## 8.3 Introduction de la fonctionnelle de Lyapunov adaptée pour $(mKdV)$ et la régularité $H^2$

**Définition 112.** Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ et $u(t)$ la solution de $(mKdV)$ associée. On définit alors

$$F[u](t) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_{xx}^2(t,x)dx - \frac{5}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)u_x^2(t,x)dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} u^6(t,x)dx$$

**Lemme 113.** *Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ et $u(t)$ la solution de $(mKdV)$ associée. Alors, la fonctionnelle $F[u](t)$ est une quantité conservée en temps.*

*Remarque* 114. L'existence de cette fonctionnelle conservée est une spécificité de l'équation $(mKdV)$. Cela ne marche pas pour d'autres formes de l'équation de Korteweg-de Vries.

*Démonstration.* Il suffit d'en faire la vérification directe par calcul, comme pour les autres intégrales conservées de $(mKdV)$. □

On va maintenant définir la fonctionnelle de Lyapunov qu'on va considérer. Cela sera une quantité conservée à valeurs réelles, bien définie pour les solutions de régularité $H^2$.

**Définition 115.** Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ et $u(t)$ la solution de $(mKdV)$ associée. On définit

$$\mathcal{H}[u](t) := F[u](t) + 2(\beta^2 - \alpha^2) I_3[u](t) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 I_2[u](t)$$

où $\alpha, \beta$ sont les paramètres d'échelle associées au breather considéré.

**Lemme 116.** *Soit $z \in H^2(\mathbb{R})$ une fonction avec une norme $H^2$ suffisament faible, $B$ un breather. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ (c'est le temps auquel on considère le breather), on a*

$$\mathcal{H}[B + z] - \mathcal{H}[B] = \frac{1}{2}\mathcal{Q}[z] + \mathcal{N}[z]$$

*où*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[z] := &\int_{\mathbb{R}} z_{xx}^2 + 2(\beta^2 - \alpha^2)\int_{\mathbb{R}} z_x^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 \int_{\mathbb{R}} z^2 - 5\int_{\mathbb{R}} B^2 z_x^2 \\ &+ 5\int_{\mathbb{R}} B_x^2 z^2 + 10\int_{\mathbb{R}} B B_{xx} z^2 + \frac{15}{2}\int_{\mathbb{R}} B^4 z^2 - 6(\beta^2 - \alpha^2)\int_{\mathbb{R}} B^2 z^2\end{aligned}$$

*et $\mathcal{N}[z]$ satisfait*

$$|\mathcal{N}[z]| \le K \|z\|_{H^2(\mathbb{R})}^3$$

*Démonstration.* Il suffit de développer le calcul et d'utiliser l'équation elliptique vérifiée par $B$. □

*Remarque* 117. Ainsi, $B$ est un point extrémal de la fonctionnelle $\mathcal{H}$.

## 8.4 Précisions sur la forme quadratique $\mathcal{Q}$

On introduit un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R})$, à domaine dense $H^4(\mathbb{R})$. $\alpha$ et $\beta$ sont toujours les paramètres d'échelle associées au breather considéré.

**Définition 118.** $\mathcal{L}[z](x,t) := z_{(4x)}(x) - 2(\beta^2 - \alpha^2) z_{xx}(x) + (\alpha^2 + \beta^2)^2 z(x) + 5B^2 z_{xx}(x) + 10 B B_x z_x(x) + [5B_x^2 + 10 B B_{xx} + \frac{15}{2} B^4 - 6(\beta^2 - \alpha^2) B^2] z(x)$
(le temps $t$ ne sert qu'à donner le temps auquel on considère le breather).

$\mathcal{Q}$ se définit comme la forme quadratique associée à $\mathcal{L}$ (on rappelle qu'il s'agit d'un opérateur auto-adjoint).

**Lemme 119.**

$$\mathcal{Q}[z] = \int_{\mathbb{R}} z\mathcal{L}[z]$$

**Lemme 120.** *L'opérateur $\mathcal{L}$ est une perturbation compacte de l'opérateur à coefficients constants*

$$\mathcal{L}_0[z] := z_{(4x)} - 2(\beta^2 - \alpha^2) z_{xx} + (\alpha^2 + \beta^2)^2 z$$

*En particulier, le spectre essentiel de $\mathcal{L}$ est $[(\alpha^2 + \beta^2)^2, +\infty[$ dans le cas où $\beta \ge \alpha$, et c'est $[4\alpha^2\beta^2, +\infty[$ dans le cas $\beta < \alpha$.*

*Démonstration.* Le fait que $\mathcal{L}$ est une perturbation compacte vient de la décroissance de $B$ en $+\infty$ à temps fixé. On en déduit le spectre essentiel de $\mathcal{L}$ grâce aux propriétés du spectre d'un opérateur auto-adjoint qu'on peut trouver, par exemple, dans [11]. $\square$

**Définition 121.** On pose $B_1(t;x_1,x_2) := \partial_{x_1} B_{\alpha,\beta}(t;x_1,x_2)$ et $B_2(t;x_1,x_2) := \partial_{x_2} B_{\alpha,\beta}(t;x_1,x_2)$

*Remarque* 122. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $B_1$ et $B_2$ sont deux fonctions linéairement indépendantes dans la classe de Schwartz.

**Lemme 123.** *Soit $t \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ et $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$\ker(\mathcal{L}) = Vect\{B_1(t;x_1,x_2), B_2(t;x_1,x_2)\}$$

*Démonstration.* On trouve le noyau de $\mathcal{L}$ à partir du noyau de $\mathcal{L}_0$, cf. [15]. $\square$

**Lemme 124.** *Soit $B$ un breather de $(mKdV)$. On a*

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda_\alpha B \mathcal{L}[\Lambda_\alpha B] = 32\alpha^2\beta > 0$$

*et*

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda_\beta B \mathcal{L}[\Lambda_\beta B] = -32\alpha^2\beta > 0$$

*Démonstration.* Par calcul direct, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \Lambda_\alpha B \mathcal{L}[\Lambda_\alpha B] = -4\alpha \int [B_{xx} + B^3 + (\alpha^2+\beta^2)B]\Lambda_\alpha B$$

D'après les relations obtenues pour les dérivées de la masse par rapport aux paramètres,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Lambda_\alpha B \mathcal{L}[\Lambda_\alpha B] &= -4\alpha \int [B_{xx} + B^3]\Lambda_\alpha B \\ &= 4\alpha \partial_\alpha I_3[B] = 32\alpha^2\beta\end{aligned}$$

d'après les différentes expressions pour $I_3[B]$.

Pour la deuxième relation, on obtient par calcul direct et puis par les même méthodes que pour la première relation

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Lambda_\beta B \mathcal{L}[\Lambda_\beta B] &= 4\beta \int [B_{xx} + B^3 - (\alpha^2+\beta^2)B]\Lambda_\beta B \\ &= -4\beta\partial_\beta I_3[B] - 16\beta(\alpha^2+\beta^2) \\ &= -16\beta(\alpha^2-\beta^2) - 16\beta(\alpha^2+\beta^2) \\ &= -32\alpha^2\beta\end{aligned}$$

$\square$

*Remarque* 125. On a donc trouvé une direction négative pour $\mathcal{L}$, c'est $\Lambda_\beta B$. Toutefois, $\Lambda_\alpha B$ est une direction positive.

**Corollaire 126.** *Soit*

$$B_0 := \frac{\alpha\Lambda_\beta B + \beta\Lambda_\alpha B}{8\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}$$

*Alors $B_0$ est dans la classe de Schwartz et vérifie $\mathcal{L}[B_0] = -B$, et*

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} B_0\mathcal{L}[B_0] = -\frac{1}{4\beta(\alpha^2+\beta^2)} < 0$$

*Remarque* 127. Ainsi, $B_0$ est aussi une direction négative.

**Lemme 128.** *Soit $B$ un breather de $(mKdV)$, et $B_1, B_2$ le noyau correspondant de l'opérateur $\mathcal{L}$. Alors $\mathcal{L}$ a*

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} \dim\ker W[B_1,B_2](t;x)$$

*valeurs propres strictement négatives, comptées avec multiplicité, où $W$ est la matrice wronskiienne des fonctions $B_1$ et $B_2$*

$$W[B_1,B_2](t;x) := \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ (B_1)_x & (B_2)_x \end{bmatrix}(t,x)$$

*Démonstration.* cf. [17] et [18], selon [15]. □

**Lemme 129.** *Soit $B$ un breather de $(mKdV)$, et $B_1, B_2$ le noyau correspondant de l'opérateur $\mathcal{L}$. Alors*

$$\det W[B_1,B_2](t;x) = \frac{16\alpha^3\beta^3(\alpha^2+\beta^2)[\alpha\sinh(2\beta y_2) - \beta\sin(2\alpha y_1)]}{(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\cosh(2\beta y_2) - \beta^2\cos(2\alpha y_1))^2}$$

*Remarque* 130. Cette relation est correcte aussi pour les breathers dont les paramètres $x_1, x_2$ dépendent du temps.

*Démonstration. Etape 1* La première consiste à prouveer la relation suivante

$$\det W[B_1,B_2](t;x) = -2(\alpha^2+\beta^2)\int_{-\infty}^{x}(\widetilde{B}_{12}^2(t,s) - \widetilde{B}_{11}(t,s)\widetilde{B}_{22}(t,s))ds$$

où $\widetilde{B}$ a été définie plus haut comme primitive en $x$ de $B$ et $\widetilde{B}_j = \partial_{x_j}\widetilde{B}$.

On rappelle la relation $B_{xx} + \widetilde{B}_t + B^3 = 0$. On en prenant des dérivées par rapport à $x_1$ et $x_2$, on obtient les équations

$$(B_1)_{xx} + (\widetilde{B}_1)_t + 3B^2B_1 = 0$$

et

$$(B_2)_{xx} + (\widetilde{B}_2)_t + 3B^2B_2 = 0$$

En multipliant la première équation par $B_2$ et la première par $B_1$ et en faisant la somme, on obtient

$$((B_1)_x B_2 - (B_2)_x B_1)_x = (\widetilde{B}_2)_t B_1 - (\widetilde{B}_1)_t B_2$$

Par différentiation d'une fonction de deux variables, $B = \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2$. De même, $(\widetilde{B}_1)_t = \delta\widetilde{B}_{11} + \gamma\widetilde{B}_{12}$ et $(\widetilde{B}_2)_t = \delta\widetilde{B}_{12} + \gamma\widetilde{B}_{22}$. On reprend la relation ci-dessus,

$$\begin{aligned}((B_1)_x B_2 - (B_2)_x B_1)_x &= (\delta\widetilde{B}_{12} + \gamma\widetilde{B}_{22})(\widetilde{B}_{11} + \widetilde{B}_{12}) - (\delta\widetilde{B}_{11} + \gamma\widetilde{B}_{12})(\widetilde{B}_{12} + \widetilde{B}_{22}) \\ &= (\delta - \gamma)(\widetilde{B}_{12}^2 - \widetilde{B}_{22}\widetilde{B}_{11})\end{aligned}$$

On obtient l'identité désirée par intégration.

*Etape 2* La deuxième étape consiste à en déduire la relation de l'énoncé.

Pour cela, on écrit explicitement le résultat du calcul $\widetilde{B}_{12}^2 - \widetilde{B}_{22}\widetilde{B}_{11}$, et on calcule l'inégrale par primitivisation de l'expression obtenue. On obtient ainsi l'expression de l'énoncé. □

**Proposition 131.** *L'opérateur $\mathcal{L}$ a une unique valeur propre strictement négative $-\lambda_0^2 < 0$, de multiplicité 1. De plus, $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha, \beta, x_1, x_2, t)$ dépend de façon continue de ses paramètres.*

*Démonstration.* Il nous faut calculer le déterminant du lemme pour voir à quels endroits il s'annule. En fait, il nous suffit de considérer le comportement de la fonction suivante

$$f(y_2) = f_{t,\alpha,\beta,\widetilde{x_2}}(y_2) := \alpha\sinh(2\beta y_2) - \beta\sin(2\alpha(y_2 + (\delta - \gamma)t + \widetilde{x_2}))$$

où $\widetilde{x_2} := x_1 - x_2$.

Pour $y_2 \in \mathbb{R}$ tel que $|\sinh(2\beta y_2)| > \frac{\beta}{\alpha}$, $f$ ne s'annule pas. De plus, il existe $R_0 = R_0(\alpha, \beta) > 0$ tel que pour tout $y_2 > R_0$ on a $f(y_2) > 0$, et pour tout $y_2 < -R_0$ on a $f(y_2) < 0$. Donc, comme $f$ est continue, il existe $y_0 = y_0(t, \alpha, \beta, \widetilde{x_2}) \in [-R_0, R_0]$ tel que $f(y_0) = 0$.

On voit de plus que pour $y_2 \neq 0$, $f'(y_2) > 0$. D'où l'unicité du zéro de $f$.

Il reste à montrer que $W[B_1, B_2](t; x)$ n'est pas nulle, sinon le nombre de valeurs propres strictement négatioves comptées avec multiplicité pourrait être égal à 2. D'après la preuve du lemme précédent, notons que pour $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ fixés, on a

$$(B_1)_{xx} + (\widetilde{B}_1)_t + 3B^2 B_1 = 0$$

où $(\widetilde{B}_1)_t$ peut être vu comme un terme-source. D'après la théorie de Cauchy-Lipschitz, $B_1$ et $(B_1)_x$ ne peuvent pas être tous les deux nuls en un point donné (sinon ils seraient tous les deux nuls partout). □

**Corollaire 132.** *Il existe une fonction continue $f_0 = f_0(\alpha, \beta)$,bien définie pour tout $\alpha, \beta > 0$, et telle que*

$$-\lambda_0^2 < -f_0(\alpha, \beta) < 0$$

*pout tous $\alpha, \beta > 0$ et $t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*

**Définition 133.** Soit $B_{-1}$ une fonction propre de norme $L^2$ égale à 1, associée à l'unique valeur propre strictement négative de $\mathcal{L}$. On notera $-\lambda_0^2$ l'unique valeur propre négative de $\mathcal{L}$.

**Lemme 134.** *La valeur propre nulle est isolée. De plus, il existe une fonction continue $\nu_0 = \nu_0(\alpha, \beta)$, bien définie et strictement positive pour tous $\alpha, \beta > 0$ et telle que pour tout $z_0 \in H^2(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\int z_0 B_{-1} = \int z_0 B_1 = \int z_0 B_2 = 0$$

*on a*

$$\mathcal{Q}[z_0] \geq \nu_0 \|z_0\|^2_{H^2(\mathbb{R})}$$

*Démonstration.* Puisque le spectre essentiel de $\mathcal{L}$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, la valeur propre nulle est isolée. On peut en déduire, par mesure spectrale, qu'il existe $\nu_0 = \nu_0(\alpha, \beta, x_1, x_2, t) > 0$ tel que pour $z$ $L^2$-orthogonal à $B_{-1}, B_1, B_2$, on a $\mathcal{Q}[z] \geq \nu_0 \|z\|^2_{L^2}$. En utilisant la technique du lemme 80, quitte à augmenter un peu la constante $\nu_0$, on trouve que $\mathcal{Q}[z] \geq \nu_0 \|z_0\|^2_{H^2}$. Il est clair que la constante $\nu_0$ est continue en toutes ses variables. Par invariance par translation du problème en temps et en espace, on peut dire que $\nu_0$ dépend uniquement de $\alpha, \beta$ et de $y_1 - y_2 = (\delta - \gamma)t + (x_1 - x_2)$ de façon continue. Or, $\nu_0$ dépend de façon périodique de la dernière variable, donc on peut donner une borne strictement positive qui ne dépend que de $\alpha$ et $\beta$. □

On n'a pas d'expression explicite de $B_{-1}$, c'est pourquoi on aimerait avoir une version plus maniable du lemme précédent.

**Proposition 135.** *Il existe $\mu_0 > 0$, qui ne dépend que de $\alpha, \beta$, telle que pour tout $z \in H^2(\mathbb{R})$ vérifiant*

$$\int B_1 z = \int B_2 z = 0$$

*on a*

$$\mathcal{Q}[z] \geq \mu_0 \|z\|^2_{H^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{\mu_0} (\int zB)^2$$

*Démonstration.* On va prouver que pour tout $z \in H^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\int B_1 z = \int B_2 z = \int Bz = 0$, on a $\mathcal{Q}[z] \geq \mu_0 \|z\|^2_{L^2}$. On va le montrer mais d'abord on va montrer comment cela implique l'énoncé de la proposition.

Pour $z \in H^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\int B_1 z = \int B_2 z = 0$, on peut écrire

$$z = \frac{(\int zB)B}{\int B^2} + z'$$

où $z'$ est orthogonal à $B$. On peut supposer que $\|z\|_{L^2} = 1$ dans ce qui suit, étant donné que l'inégalité à montrer est homogène. Dans ce cas, $\|z'\|_{L^2} \leq 1$. On trouve alors que

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[z] &= (\int zB)^2 \frac{\int B\mathcal{L}[B]}{(\int B^2)^2} + 2\frac{(\int zB)(\int z'\mathcal{L}[B])}{\int B^2} + \int z'\mathcal{L}[z'] \\ &\geq -C(\int zB)^2 - C'(\int zB)(\int z'^2)^{1/2} + \mu_0 \|z'\|^2_{L^2}\end{aligned}$$

où $C = |\frac{\int B\mathcal{L}[B]}{(\int B^2)^2}|$ et $C' = |\frac{2}{\int B^2}(\int \mathcal{L}[B]^2)^{1/2}|$, et en utilisant notamment Cauchy-Schwartz pour la dernière ligne. Ensuite,

$$\mathcal{Q}[z] \geq -C(\int zB)^2 - C'(\int zB) + \mu_0\|z'\|_{L^2}^2$$

car $\|z'\|_{L^2} \leq 1$. Maintenant, quitte à multiplier $z$ par une constante suffisament élevée (on perd l'hypothèse $\|z\|_{L^2} = 1$), on peut faire en sorte que $(\int zB)^2 \geq 1$. Et obtenir, avec $K = \max\{C, \text{C'}\}$,

$$\mathcal{Q}[z] \geq -K(\int zB)^2 + \mu_0\|z'\|_{L^2}^2$$

Quitte à augmenter $K$, on obtient

$$\mathcal{Q}[z] \geq -K(\int zB)^2 + \mu_0\|z\|_{L^2}^2$$

Et en utilisant la technique du lemme 80, on peut obtenir l'inégalité désirée.

Passons maintenant à la preuve du fait que pour tout $z \in H^2(\mathbb{R})$ vérifiant $\int B_1 z = \int B_2 z = \int Bz = 0$, on a $\mathcal{Q}[z] \geq \mu_0\|z\|_{L^2}^2$.

On rappelle $B_0$ défini ci-dessus et qui vérifie $\mathcal{L}[B_0] = -B$. On va décomposer $z$ et $B_0$ dans $Vect\{B_{-1}, B_1, B_2\}$ et le sous-espace orthogonal correspondant. On a :

$$z = \widetilde{z} + mB_{-1}, \quad B_0 = b_0 + nB_{-1} + p_1B_1 + p_2B_2$$

On obtient

$$\mathcal{Q}[z] = \int(\mathcal{L}\widetilde{z} - m\lambda_0^2B_{-1})(\widetilde{z} + mB_{-1}) = \mathcal{Q}[\widetilde{z}] - m^2\lambda_0^2$$

Puis,

$$\begin{aligned}0 &= \int zB = -\int z\mathcal{L}[B_0] = -\int \mathcal{L}[z]B_0 \\ &= -\int(\mathcal{L}[\widetilde{z}] - m\lambda_0^2B_{-1})(b_0 + nB_{-1} + p_1B_1 + p_2B_2) = -\int \mathcal{L}[\widetilde{z}]b_0 - mn\lambda_0^2\end{aligned}$$

Puis,

$$\int B_0B = -\mathcal{Q}[b_0] + n^2\lambda_0^2$$

En combinant les relations obtenues

$$\mathcal{Q}[z] = \mathcal{Q}[\widetilde{z}] - \frac{(\int \mathcal{L}[\widetilde{z}]b_0)^2}{\int B_0B + \mathcal{Q}[b_0]}$$

On peut remarquer que les quantités dans le dénominateur sont strictement positives.

En décomposant $\widetilde{z} = \lambda b_0 + \widetilde{z}'$, on obtient

$$(\int \mathcal{L}[\widetilde{z}]b_0)^2 = \mathcal{Q}[\widetilde{z}]\mathcal{Q}[b_0]$$

En particulier, on dispose de $0 < a < 1$ tel que

$$\frac{(\int \mathcal{L}[\widetilde{z}]b_0)^2}{\int B_0 B + \mathcal{Q}[b_0]} \leq a\mathcal{Q}[\widetilde{z}]$$

Finalement, d'après les relations prouvées ci-dessus, $\mathcal{Q}[z] \geq (1-a)\mathcal{Q}[\widetilde{z}] \geq 0$ et donc $\mathcal{Q}[\widetilde{z}] \geq m^2\lambda_0^2$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}[z] &\geq (1-a)\mathcal{Q}[\widetilde{z}] \geq \frac{1}{2}(1-a)\mathcal{Q}[\widetilde{z}] + \frac{1}{2}(1-a)m^2\lambda^2 \\ &\geq L\|\widetilde{z}\|_{L^2}^2 + Lm^2\|B_{-1}\|_{L^2}^2 \geq L\|z\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

□

## 8.5 Preuve du théorème sur la stabilité $H^2$ des breathers de $(mKdV)$

Soit $\eta \in ]0, \eta_0[$ (où $\eta_0$ sera déterminé par un lemme ci-dessous et par le raisonnement qui suit le lemme). Soit $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ tel que $\|u_0 - B_{\alpha,\beta}(0;0;0)\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq \eta$ et soit $u \in C(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}))$ la solution de $(mKdV)$ associée. On va prouver le théorème pour les temps positifs, la preuve pour les temps négatifs est analogue.

Soit $K^* > 0$ une constante à fixer ultérieurement. On définit le *temps maximal de stabilité* $T^*$ par

$$T^* := \sup\{T > 0, \forall t \in [0,T], \exists \widetilde{x_1}(t), \widetilde{x_2}(t) \in \mathbb{R}, \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - B(t; \widetilde{x_1}(t), \widetilde{x_2}(t))\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq K^*\eta\}$$

Il est clair que $T^* \in ]0, +\infty]$ est bien défini. L'objectif est de montrer que $T^* = +\infty$. Supposons par l'absurde que $T^* < +\infty$.

**Lemme 136.** *Il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $\eta \in ]0, \eta_0[$, on a l'énoncé suivant.*

*Il existe des fonctions de classe $C^1$ $x_1(t), x_2(t) \in \mathbb{R}$ définies pour tout $t \in [0, T^*]$, et telles que*

$$z(t) := u(t) - B(t)$$

*et*

$$B(t,x) := B_{\alpha,\beta}(t, x; x_1(t), x_2(t))$$

*vérifient pour $t \in [0, T^*]$,*

$$\int B_1(t; x_1(t), x_2(t))z(t) = \int B_2(t; x_1(t), x_2(t))z(t) = 0$$

*De plus, on a*

$$\|z(t)\|_{H^2(\mathbb{R})} \leq KK^*\eta$$

*pour une certaine constante $K > 0$, indépendante de $K^*$.*

*Démonstration.* On va définir une fonction $J$ de classe $C^1$ de $C([0,T^*],H^2(\mathbb{R}))\times C([0,T^*],\mathbb{R}^2)$ dans $C([0,T^*],\mathbb{R}^2)$ par $J(v;x_1,x_2):=\begin{pmatrix} J_1(v;x_1,x_2) \\ J_2(v;x_1,x_2)\end{pmatrix}$, où pour $j=1,2$, on pose

$$J_j(v(t);x_1(t),x_2(t)) := \int_{\mathbb{R}} (v(t,x)-B(t,x;x_1(t),x_2(t)))B_j(t,x;x_1(t),x_2(t))dx$$

Il est clair que $J_j(B(t;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t));\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))=0$ ($\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t)$ sont définis dans la définition de $T^*$). Et on montre que la différentielle de $J$ par rapport à la deuxième variable est inversible en $(B(t;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t));\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))$. En effet, cette différentielle vaut

$$\begin{aligned}(\varepsilon_1(t),\varepsilon_2(t)) \longmapsto \varepsilon_1(t) &\begin{pmatrix} -\int B_1(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))^2dx \\ -\int B_1(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))B_2(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))dx \end{pmatrix}\\ +\varepsilon_2(t) &\begin{pmatrix} -\int B_1(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))B_2(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))dx \\ -\int B_2(t,x;\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t))^2dx \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En calculant le déterminant en chaque temps, on voit qu'on peut inverser une fonction donnée en chaque temps. Comme tous les paramètres sont continus, la fonction obtenue après cette inversion ponctuelle est continue.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites. On voit alors qu'en choisissant $K^*\eta$ suffisament petit, les fonctions implicites $x_1(t),x_2(t)\in\mathbb{R}$ peuvent bien être définies.

On peut choisir $K^*\eta$ suffisament petit de sorte à ce que la distance entre $x_1(t),x_2(t)$ et $\widetilde{x_1}(t),\widetilde{x_2}(t)$ soit contrôlée. Puisque $B$ est continue dans $H^2$ en fonction de ses paramètres de translation, on peut en déduire la dernière inégalité. $\square$

Ainsi, on définit $z$ et $B$ sur $[0,T^*]$ grâce au lemme ci-dessus. On sait que $\mathcal{H}$ est une quantité conservée pour $u$. Elle l'est aussi pour $B$ grâce à l'invariance par translation en espace. Quitte à choisir $\eta_0$ encore plus petit, d'après la sous-section 8.3, on a

$$\mathcal{H}[u](t)=\mathcal{H}[B](t)+\frac{1}{2}\mathcal{Q}[z](t)+\mathcal{N}[z](t)$$

On a donc, pour $t\in[0,T^*]$,

$$\frac{1}{2}\mathcal{Q}[z](0)+\mathcal{N}[z](0)=\frac{1}{2}\mathcal{Q}[z](t)+\mathcal{N}[z](t)$$

En sachant que $\mathcal{Q}$ est d'ordre $\|z\|_{H^2}^2$, on en déduit qu'il existe une constante $C>0$ qui ne dépend que de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{N}$ telle que

$$\mathcal{Q}[z](t)\le C\|z(0)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2+C\|z(t)\|_{H^2(\mathbb{R})}^3$$

Grâce à la section précédente, on peut affirmer que

$$\mathcal{Q}[z](t)\ge \mu_0\|z(t)\|_{H^2(\mathbb{R})}^2-\frac{1}{\mu_0}(\int_{\mathbb{R}} z(t)B(t))^2$$

Donc, (quitte à augmenter un peu $C$ en fonction de $\mu_0$)

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R})} &\leq C\|z(0)\|^2_{H^2(\mathbb{R})} + C\|z(t)\|^3_{H^2(\mathbb{R})} + C|\int_{\mathbb{R}} z(t)B(t)|^2 \\
&\leq C(KK^*)^2\eta^2 + C(KK^*)^3\eta^3 + C|\int_{\mathbb{R}} z(t)B(t)|^2 \\
&\leq C(KK^*)^2\eta^2 + C(KK^*)^3\eta^3 + C\|B(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|z(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq K'\eta^2 + K'\eta^3 + K'\eta^2
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que la masse $L^2$ est une quantité conservée pour $B$, et en prenant une constante $K' = \max\{C(KK^*)^2, C(KK^*)^3, C\|B\|^2_{L^2}\} = C(KK^*)^3$ quitte à choisir $K^*$ suffisament grand.

En somme, pour $t \in [0, T^*]$,

$$\begin{aligned}
\|z(t)\|^2_{H^2(\mathbb{R})} &\leq (2K' + \eta_0 K')\eta^2 = (2+\eta_0)C(KK^*)^3\eta^2 \leq (2+\eta_0)C(KK^*)^3\eta_0\eta \\
&\leq \frac{K^*}{2}\eta
\end{aligned}$$

quitte à choisir $\eta_0$ suffisament petit (on choisit $\eta_0$ suffisament petit après le choix de $K^*$ suffisament grand).

Cela contredit la définition de $T^*$.

# Références


[1] A-L. Dalibard, Cours donné à l'UPMC sur les *EDP d'évolution*, 2017, Chapitre 4, Equation de Schrödinger

[2] Raphaël Danchin et Pierre Raphaël, *SOLITONS, DISPERSION ET EXPLOSION, Une introduction à l'étude des ondes non linéaires*, 2015

[3] Terence Tao, *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*, AMS, 2006

[4] B. Gidas, W. M. Ni et L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., 68, 1979, pages 209-243

[5] Pierre-Louis Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 1, 1984, pages 109-145

[6] Michael I. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger Equations and Sharp Interpolation Estimates*, Comm. Math. Phys., 87, 1983, pages 567-576

[7] Kevin McLeod, *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^n$, II*, Transactions of the American Mathematical Society, 339, 2, 1993

[8] Michael I. Weinstein, *Lyapunov Stability of Ground States of Nonlinear Dispersive Evolution Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 51-68, 1986

[9] J. Bona, *On the stability theory of solitary waves*, Proc. R. Soc. Lond. A. 344, 363-374, 1975

[10] Konstantin Pankrashkin, *Introduction to the spectral theory*, Université Paris-Sud, 2014

[11] Anne-Sophie Bonnet-Bendhia et Patrick Joly, *Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et application à l'étude des ondes guidées*, Cours MAE 21

[12] Michael I. Weinstein, *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. MATH. ANAL., Vol. 16, No. 3, May 1985

[13] Carlos E. Kenig, Gustavo Ponce and Luis Vega, *Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via the Contraction Principle*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLVI, 527-620, 1993

[14] Miguel A. Alejo, Claudio Muñoz, and José M. Palacios, *On the variational structure of breather solutions*, 29 avril 2016

[15] Miguel A. Alejo and Claudio Muñoz, *Nonlinear stability of mKdV breathers*, février 2012

[16] Shu-Ming Chang, Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi, Tai-Peng Tsai, *Spectra of Linearized Operators for NLS Solitary Waves*, 2006

[17] L. Greenberg, *An oscillation method for fourth order, self-adjoint, two-boundary value problem with nonlinear eigenvalues*, SIAM J. Math. Anal. 22, 1991, no. 4, 1021-1042

[18] J.H. Maddocks and R.L. Sachs, *On the stability of KdV multi-solitons*, Comm. Pure Appl. Math. 46, 867-901, 1993